

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»  
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»  
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

*Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису*

**ПРОКОФЬЄВ АНДРІЙ ЮРІЙОВИЧ**

УДК 519.972.5:004.942.001.57

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТОЧНОСТІ ТА ДОСТОВІРНОСТІ  
ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В  
ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ**

Спеціальність: 121 Інженерія програмного забезпечення

Галузь знань: 12 Інформаційні технології

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

\_\_\_\_\_ А. Ю. Прокоф'єв

Науковий керівник – Положаєнко С. А. доктор технічних наук, професор

Одеса – 2025

## АНОТАЦІЯ

*Прокоф'єв А. Ю.* Методи аналізу точності та достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем в прикладних задачах їх моделювання і управління. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 121 Інженерія програмного забезпечення. – Національний університет «Одеська політехніка» Міністерства освіти і науки України, Одеса, 2025.

В роботі було вирішено важливу науково-практичну задачу, яка полягає у розробці методів прогнозування точності та забезпечення достовірності числової реалізації математичних моделей динамічних систем при розв'язуванні прикладних задач їх дослідження (моделювання та пошуку управління).

Встановлено, що розробка і удосконалення методів розрахунку та контролю процесів функціонування динамічних систем, які складають переважну більшість технічних і технологічних процесів та об'єктів, являє собою *актуальну* наукову проблему, що має також важливе *прикладне* значення. Показано, що конструктивним шляхом дослідження динамічних систем є *моделювання* (зокрема математичне), в ході якого досліджується не реальна (фізична) динамічна система, а її *математична модель* (ММ), яка формалізовано – у вигляді певного математичного виразу – описує фізичні явища, що характеризують динамічні властивості досліджуваної системи. При цьому важливим класом моделей динамічних систем слід вважати *диференціальні* та *інтегральні рівняння*, які, на відміну від інших моделей (наприклад, рекурентних та емпіричних залежностей тощо), зокрема, адекватно описують реальні фізичні явища і процеси в усьому діапазоні параметрів, а другі – крім того, дозволяють описувати явища «післядії» (тобто реакцію на раніше введені збуджуючі впливи), а також забезпечують ефект «пам'яті», що полягає у накопиченні інформації про попередні стани динамічної системи. Результати математичного моделювання можуть мати як самостійне значення в прямій задачі аналізу динамічних систем – у вигляді отриманих

різного роду характеристик (перехідних, імпульсних, частотних тощо), так і у випадку віднаходження відгуків динамічних систем на введені впливи при розв'язуванні зворотної задачі – синтезу алгоритмів та стратегій управління зазначеними системами.

Важливим аспектом математичного моделювання, крім *адекватності* ММ реальній динамічній системі, що полягає у відповідності розв'язків математичних виразів (які складають ММ) динамічній поведінці фізичної системи, є забезпечення *достовірності* цих розв'язків, отриманих із застосуванням при реалізації ММ конкретних обчислювальних засобів і для введених у модель вихідних даних. У зв'язку з цим поставлено та розв'язано низку задач щодо створення дієвих методів і відповідних алгоритмів контролю та аналізу процесів функціонування і точності апаратно-програмних засобів, які реалізують ММ досліджуваних динамічних систем.

До складних проблем, які не мають дотепер універсального рішення, відноситься оцінка *точності* розв'язку задач моделювання та управління динамічними системами із застосуванням засобів комп'ютерної техніки.

На основі аналізу переваг і недоліків існуючих методів аналізу якісних показників отриманих числових реалізацій ММ динамічних систем, в роботі здійснено спробу усунення протиріччя між значною мірою розвинутої модельної і методологічної підтримки засобів математичного моделювання та відсутністю задовільних (зокрема, за швидкодією та обчислювальними витратами) оцінок точності та достовірності розв'язків відповідних рівнянь як моделей досліджуваних динамічних систем.

Конструктивність запропонованих методів контролю показників якості при обчислювальній реалізації ММ динамічних систем в задачах їх моделювання та управління підтверджено розв'язком тестових прикладів, наближених до реальних практичних випадків.

**Метою дисертаційної роботи** є розробка методів прогнозування точності і аналізу достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем, представлених у класах диференціальних та інтегральних рівнянь – при

розв'язуванні прикладних задач моделювання і управління на їх основі, шляхом визначення показників якості задіяних комп'ютерних та програмно-алгоритмічних інструментальних засобів.

Для досягнення вказаної мети дослідження в дисертаційній роботі було **поставлено та розв'язано наступні задачі:**

– розглянуто існуючі підходи до математичної формалізації динамічних систем в задачах їх моделювання і управління, в результаті чого показано особливості опису динамічних систем моделями у вигляді диференціальних та інтегральних рівнянь різних типів;

– виконано аналіз методів числової реалізації диференціальних та інтегральних рівнянь як математичних моделей динамічних систем, а також похибок, які виникають при цьому;

– розроблено метод ранжирування за похибкою для оцінки точності розв'язування задач моделювання динамічними системами та управління ними;

– побудовано (на основі методу ранжирування за похибкою) оцінки «знизу» функцій розподілу неусувної похибки реалізації математичних моделей динамічних об'єктів, представлених диференціальними та інтегральними рівняннями, в задачах моделювання і управління;

– розроблено методи (екстраполяційний, інтерполяційний та адаптивний) контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем в процесах їх моделювання та управління;

– опрацьовано досвід практичного застосування методів ранжирування за похибкою та контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем в задачах їх моделювання та управління.

**Наукова новизна** отриманих результатів, які виносяться на захист, полягає в тому, що *вперше*:

– запропоновано метод ранжирування за похибкою при розв'язуванні задач моделювання динамічних систем та управління ними, який, на відміну від відомих, зокрема, методів оцінювання точності числового розв'язування рівнянь

математичної фізики, дозволяє попередньо (до початку процесу комп'ютерного розв'язування задачі) виконати розрахунок залежності похибки розв'язку від характеристик первинних похибок із залученням класифікації за точністю задач, що розв'язуються;

– запропоновано метод контролю достовірності обчислювальної реалізації ММ динамічних систем зі зростаючою точністю, який, на відміну від методів «прогноз – корекція», забезпечує послідовне отримання значення шуканої функції стану динамічної системи з порядком точності локальної похибки, який (порядок) збільшується;

– запропоновано методи контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем в процесах їх моделювання та управління, засновані на ідеї введення контрольного алгоритму, який виконується на етапі числового розв'язування поставленої (основної) задачі, але такого, що простіший за основний; причому, запропоновані методи контролю достовірності, дозволяють досягнути підвищення останньої за рахунок застосування в контрольному алгоритмі інформації, яку вже проконтрольовано на попередніх кроках основного алгоритму (екстраполяційний метод), або дозволяють організувати неявний контроль, що забезпечує зменшення діапазону відхилення величини, яка контролюється від контрольної, тобто дозволяють знизити рівень шуму (інтерполяційний метод);

– запропоновано критерії щодо прийняття рішення про наявність або відсутність похибки (збою) в основному обчислювальному алгоритмі розв'язування задач моделювання динамічних систем та управління ними, що дозволило сформулювати систему прийняття рішень при контролі достовірності (яка ґрунтується на основі уведених поняттях міри точності обчислень та допустимої області значень цієї міри), а також розробити адаптивні методи контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем, які забезпечують визначення параметрів контрольного алгоритму з умови мінімуму певної міри близькості результатів, отриманих за контрольним та основним алгоритмами.

**Практична цінність** роботи полягає в тому, що запропоновані методи прогнозу точності і аналізу достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем дозволяють розширити клас важливих для практики задач моделювання та управління вказаними системами, а розроблені алгоритми, що покладено в основу запропонованих методів, орієнтовано на розв'язування широкого кола інженерних та дослідницьких задач, які виникають при аналізі динамічних систем та управлінні ними.

Застосування розроблених прикладних алгоритмів прогнозування точності та достовірності числової реалізації ММ динамічних систем дозволяють забезпечити бажану точність, а також зменшити у (1,4...2,5) рази кількість збоїв в процесі розв'язування реальних задач моделювання динамічних систем та управління ними.

Розроблені методи аналізу точності та достовірності обчислювальної реалізації ММ моделей динамічних систем запроваджено в ТОВ «Нафтогазхім Сервіс» (ТОВ «НГХ Сервіс»), де їх включено до складу програмно-алгоритмічного забезпечення діючої АСУ ТП.

Результати, отримані в дисертаційній роботі, використано при розробці лекційних курсів та відповідних циклів лабораторних робіт, з дисциплін: «Числові методи», «Комп'ютерне моделювання процесів і систем», «Ідентифікація та моделювання процесів» і «Моделі та інструментальні засоби математичного моделювання технологічних процесів», а також застосовано при розробці тем бакалаврських та магістерських кваліфікаційних робіт.

**Об'єкт досліджень** – процеси математичного моделювання динамічних систем в задачах їх моделювання та управління.

**Предмет досліджень** — оцінки якісних характеристик (точності, достовірності та відсутності збоїв при числовій реалізації) моделей та засобів моделювання і управління в задачах прикладного дослідження динамічних систем.

Ключові слова: математичне моделювання, математична модель, диференціальні та інтегральні рівняння, достовірність обчислювальної реалізації, точність розв'язку, ранжирування за похибкою.

### Список публікацій здобувача

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації.

1. Прокоф'єв А. Ю. Аналіз похибок математичного моделювання динамічних об'єктів, які описуються інтегральними рівняннями. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2022. Т. 12, № 3. С. 209-219. DOI 10.15276/imms.v12.no3.209. Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: <http://immm.opu.ua/#a23>;

[http://immm.opu.ua/files/archive/n3\\_v12\\_2022/immm\\_n3\\_v12\\_2022.pdf](http://immm.opu.ua/files/archive/n3_v12_2022/immm_n3_v12_2022.pdf).

2. Прокоф'єв А. Ю. Метод точнісного тарювання при реалізації математичних моделей динамічних систем в задачах моделювання та управління. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*, 2022. Вип. 23. С. 116-129. DOI 10.326226/2308-5916.2022-23.116-129. Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: <http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/issue/archive>.

3. Лись Д. А., Прокоф'єв А. Ю. Розробка та числова реалізація математичної моделі гравітаційної хвилі на границі поділу двошарової рідинної системи. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2023. Т. 13, № 1-2. С. 97-103. DOI 10.15276/imms.v13.no1-2.97. Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: <http://immm.opu.ua/#a23>;

[http://immm.opu.ua/files/archive/n3\\_v12\\_2022/immm\\_n1-2\\_v13\\_2023.pdf](http://immm.opu.ua/files/archive/n3_v12_2022/immm_n1-2_v13_2023.pdf).

4. Прокоф'єв А. Ю. Дослідження показників точності моделей нелінійних динамічних систем. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*, 2023. Вип. 24. С. 56–67. DOI: 10.326226/2308-5916.2023-24.56-67. Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: <http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/issue/archive>.

5. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Моделі визначення надійності динамічних систем, функціонування яких характеризується режимом профілактики. *Вчені записки ТНУ імені В. І. Вернадського. Серія: Технічні науки*, 2024. Т. 35 (74), № 1. С. 280–286. DOI: <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2024.1.1/42>. Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: <https://www.tech.vernadskyjournals.in.ua/35-74-1>.

6. Polozhaenko S. A., Prokofiev A. Yu. Estimation of Accuracy Indicators of Nonlinear Dynamic Systems. *Colloquium-journal*, 2024. Part 1. № 15 (208). P. 61–64. DOI: [10.24412/2520-6990-2024-15208-61-63](https://doi.org/10.24412/2520-6990-2024-15208-61-63).

URL: <https://colloquium-journal.org/wp-content/uploads/2024/06/Colloquium-journal-2024-208-1.pdf>.

7. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Параметри методу Рунге-Кутти з різним порядком точності при інтегруванні рівнянь динаміки в задачах моделювання нестационарних систем. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2024. Т. 14, № 1-2. С. 85–96. DOI [10.15276/imms.v14.no1-2.85](https://doi.org/10.15276/imms.v14.no1-2.85). Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: [http://immm.op.edu.ua/files/archive/n1-2\\_v14\\_2024/immm\\_n1-2\\_v14\\_2024.pdf](http://immm.op.edu.ua/files/archive/n1-2_v14_2024/immm_n1-2_v14_2024.pdf).

8. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Параметрична редукція по точності математичних моделей динамічних об'єктів систем. *Вісник Кременчуцького національного університету ім. Михайла Остроградського*, 2024. Вип. 6 (149). С. 125–131 DOI <https://doi.org/10.32782/1995-0519.2024.6.15>. Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: [https://visnikkrnu.kdu.edu.ua/visnik.php?id\\_nom=71](https://visnikkrnu.kdu.edu.ua/visnik.php?id_nom=71).

9. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Методи контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем, засновані на застосуванні контрольних алгоритмів. *Вісник Херсонського національного технічного університету*, 2025. Вип. 1 (92). Ч. 2. С. 185–193 DOI <https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2025.1.2.25> Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: [https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk\\_kntu/issue/view/72](https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk_kntu/issue/view/72).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації.

10. Прокофьев А., Баранов М. Анализ и моделирование аномальных диффузионных процессов с просторово-временными характеристиками. *Scientific Paradigm in the Context of Technologies and Society Development: proceedings of the 5<sup>th</sup> International Scientific and Practical Conference, Geneva, 16-18 May 2023, Geneva, 2023*. P. 454–458.

URL: <https://archive.interconf.center/index.php/conference-proceeding/issue/view/16-18.05.2023/164>

11. Лись Д. А., Прокофьев А.Ю. Моделирование динамического stanu ударных хвиль у пароридинних двофазних системах. *Сучасні Інформаційні Технології 2023: матеріали XIII міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених, м. Одеса, 18–19 травня 2023 р. Одеса, 2023*. С. 159–161.

URL: [https://drive.google.com/file/d/1ERFn923\\_zrEXiPcGj8S0dbSb4K6ToDE/view](https://drive.google.com/file/d/1ERFn923_zrEXiPcGj8S0dbSb4K6ToDE/view).

12. Use of dynamic neural networks for modelling nonlinear objects with significant nonlinearity / Polozhaenko S., Fomin O., Krikun V., Orlov A., Prokofiev A. *Математика та інформатика в науці й освіті: виклики сучасності: збірник тез IV Міжнародної науково-практичної Інтернет-конференції, м. Вінниця, 25–26 травня 2023 р., Вінниця, 2023*. С. 121–124.

URL: <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/791>

13. Use of Dynamic Neural Networks for Modeling Nonlinear Objects with Significant Nonlinearity / Fomin O., Polozhaenko S., Krikun V., Orlov A., Prokofiev A. *Annals of Computer Science and Intelligence System, Volume 37: preceding 18th Conference on Computer Science and Intelligence Systems. Warsaw, 17–20 September 2023, Warsaw, 2023*. P. 97–102. DOI: 10.15439/2023F3874.

URL: <https://annals-csis.org/proceedings/2023/drp/3874.html>

14. Прокофьев А. Ю., Положаенко С. А. Підвищення якості процесу моделювання динамічних систем на основі методу точностного тарування. *Проблеми та перспективи реалізації та впровадження міждисциплінарних наукових досягнень: матеріали VI Міжнародної наукової конференції, м. Біла*

Церква, 2 лютого 2024 р., Вінниця: ТОВ «УКРЛОГОС Груп, 2024. С. 155–160.  
DOI: <https://doi.org/10.36074/mcnd-02.02.2024>.

URL: <https://archive.mcnd.org.ua/index.php/conference-proceeding/issue/view/02.02.2024/52>.

15. Метод ранжирування за похибкою для оцінювання точності розв'язування задач моделювання динамічних систем / Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю., Літинський В. В., Татарин О. В. *Сучасні інформаційні та електронні технології: твори XXV Міжнародної науково-практичної конференції*, м. Одеса, 27–29 травня 2024 р. Одеса, 2024. С. 15–16.

URL: <https://www.old.tkea.com.ua/siet/archive/2024/15.pdf>.

16. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Оцінювання розв'язків задач моделювання динамічних систем на основі методу ранжування за похибкою. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей 10-ї Міжнародної наукової конференції*. м. Кам'янець-Подільський, 28–29 червня 2024 р., Кам'янець-Подільський, 2024. С. 104–105.

URL: <http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/8145>.

17. Improving measurements accuracy in weight-in-motion systems using dynamic neural networks / Oleksandr Fomin, Sergii Polozhaenko, Petro Bidyuk, Oleksii Tataryn, Andrii Prokofiev. *Information Control Systems & Technologies (ICST 2024): proceedings of the 12th International Conference*, Odesa, 23–25 September, 2024. Odesa, 2024 P. 483–493.

URL: <https://ceur-ws.org/Vol-3790/paper42.pdf>. (Scopus).

18. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Адаптивний метод контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем в процесах їх моделювання та управління. *Development Priorities for Technical Sciences in the Modern World: proceedings International scientific conference*, Riga, 19–20 March 2025, Riga, 2025. P. 35–39. DOI <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-542-6-9>

URL: <http://baltijapublishing.lv/omp/index.php/bp/catalog/book/578>.

## ABSTRACT

*Prokofiev A. Yu.* Methods for analyzing the accuracy and reliability of computational implementation of dynamic systems models in applied problems of their modelling and control. – Qualification scientific work in the form of a manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in the specialty 121 Software Engineering. – Odessa Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Odesa, 2025.

The work solved an important scientific and practical problem, which consists in developing methods for predicting the accuracy and ensuring the reliability of the numerical implementation of mathematical models of dynamic systems when solving applied problems of their research (modelling and control search).

It has been established that the development and improvement of methods for calculating and controlling the processes of functioning of dynamic systems, which constitute the vast majority of technical and technological processes and objects, is an urgent scientific problem, which also has important applied significance. It has been shown that a constructive way of studying dynamic systems is modelling (in particular, mathematical), during which not a real (physical) dynamic system is studied, but its mathematical model (MM), which is formalized – in the form of a certain mathematical expression – describes physical phenomena that characterize the dynamic properties of the system under study. At the same time, an important class of models of dynamic systems should be considered differential and integral equations, which, unlike other models (for example, recurrent and empirical dependencies, etc.), in particular, adequately describe real physical phenomena and processes in the entire range of parameters, and the latter, in addition, allow describing the phenomena of «after-effects» (i.e., the reaction to previously introduced exciting influences), and also provide a «memory» effect, which consists in accumulating information about the previous states of the dynamic system. The results of mathematical modelling can have both independent significance in the direct problem of analyzing dynamic systems – in the form of various types of characteristics obtained (transient, pulse, frequency, etc.),

and in the case of finding the responses of dynamic systems to the introduced influences when solving the inverse problem – the synthesis of algorithms and strategies for controlling the specified systems.

An important aspect of mathematical modelling, in addition to the adequacy of the MM to a real dynamic system, which consists in the correspondence of the solutions of mathematical expressions (which make up the MM) to the dynamic behaviour of the physical system, is ensuring the reliability of these solutions obtained using specific computational tools in the implementation of the MM and for the input data entered into the model. In this regard, a number of tasks have been set and solved to create effective methods and appropriate algorithms for controlling and analyzing the processes of functioning and accuracy of hardware and software tools that implement the MM of the dynamic systems under study.

Complex problems that do not yet have a universal solution include the assessment of the accuracy of solving problems of modelling and control of dynamic systems using computer technology.

Based on the analysis of the advantages and disadvantages of existing methods for analyzing the qualitative indicators of the obtained numerical implementations of MM dynamic systems, the work attempts to eliminate the contradiction between the significantly developed model and methodological support of mathematical modelling tools and the lack of satisfactory (in particular, in terms of speed and computational costs) estimates of the accuracy and reliability of solutions of the corresponding equations as models of the dynamic systems under study.

The constructiveness of the proposed methods for controlling quality indicators in the computational implementation of MM dynamic systems in the problems of their modelling and control is confirmed by the solution of test examples, close to real practical cases.

**The purpose of the dissertation** is to develop methods for predicting the accuracy and analyzing the reliability of computational implementation of models of dynamic systems, represented in the classes of differential and integral equations –

when solving applied modelling and control problems based on them, by determining the quality indicators of the computer and software-algorithmic tools involved.

To achieve the stated research goal, the **following tasks were set** and solved in the dissertation work:

- existing approaches to the mathematical formalization of dynamic systems in the tasks of their modelling and control were considered, as a result of which the features of describing dynamic systems by models in the form of differential and integral equations of various types were shown;
- methods for numerical implementation of differential and integral equations as mathematical models of dynamic systems were analyzed, as well as the errors that arise in this case;
- developed an error ranking method to assess the accuracy of solving problems of modelling and controlling dynamic systems;
- constructed (based on the error ranking method) "bottom-up" estimates of the distribution functions of the non-removable error of the implementation of mathematical models of dynamic objects, represented by differential and integral equations, in modelling and control problems;
- developed methods (extrapolation, interpolation and adaptive) for controlling the reliability of the computational implementation of models of dynamic systems in the processes of their modelling and control;
- developed experience in the practical application of error ranking methods and controlling the reliability of the computational implementation of models of dynamic systems in the problems of their modelling and control.

**The scientific novelty of the results obtained**, which are submitted for defence, lies in the fact that for the first time:

- a method of ranking by error when solving problems of modelling dynamic systems and their control has been proposed, which, unlike known methods, in particular, of assessing the accuracy of numerical solution of equations of mathematical physics, allows to preliminarily (before the beginning of the process of computer solving the problem) calculate the dependence of the solution error on the

characteristics of the primary errors with the involvement of classification by the accuracy of the problems being solved;

- a method of controlling the reliability of the computational implementation of MM of dynamic systems with increasing accuracy has been proposed, which, unlike the methods of «forecast – correction», ensures the consistent obtaining of the value of the desired function of the state of the dynamic system with the order of accuracy of the local error, which (order) increases;

- methods for controlling the reliability of the computational implementation of models of dynamic systems in the processes of their modelling and control are proposed, based on the idea of introducing a control algorithm that is performed at the stage of numerical solution of the set (main) problem, but one that is simpler than the main one; moreover, the proposed methods for controlling reliability allow to achieve an increase in the latter by using in the control algorithm information that has already been controlled at the previous steps of the main algorithm (extrapolation method), or allow to organize implicit control, which ensures a reduction in the range of deviation of the controlled value from the control, that is, they allow to reduce the noise level (interpolation method);

- criteria for making a decision on the presence or absence of an error (failure) in the main computational algorithm for solving problems of modelling and controlling dynamic systems were proposed, which allowed us to formulate a decision-making system for reliability control (which is based on the introduced concepts of the measure of accuracy of calculations and the permissible range of values of this measure), as well as to develop adaptive methods for controlling the reliability of the computational implementation of dynamic systems models, which ensure the determination of the parameters of the control algorithm from the condition of a minimum of a certain degree of proximity of the results obtained by the control and main algorithms.

**The practical value** of the work lies in the fact that the proposed methods for predicting the accuracy and analyzing the reliability of computational implementation of models of dynamic systems allow us to expand the class of problems of modeling and controlling these systems that are important for practice, and the developed

algorithms that form the basis of the proposed methods are focused on solving a wide range of engineering and research problems that arise in the analysis and control of dynamic systems.

The use of developed applied algorithms for predicting the accuracy and reliability of numerical implementation of MM dynamic systems allows to ensure the desired accuracy, as well as to reduce the number of failures (1,4...2,5) in the process of solving real problems of modelling and controlling dynamic systems.

The developed methods for analysing the accuracy and reliability of computational implementation of MM of dynamic systems were implemented at Naftogazhim Service LLC (NGH Service LLC), where they are included in the software and algorithmic support of the operating ACS.

The results obtained in the dissertation were used in the development of lecture courses and corresponding cycles of laboratory work in the disciplines: «Numerical Methods», «Computer Modelling of Processes and Systems», «Identification and Modelling of Processes» and «Models and Tools for Mathematical Modelling of Technological Processes», and were also applied in the development of topics for bachelor's and master's qualification theses.

**The object of research** is the processes of mathematical modelling of dynamic systems in the tasks of their modelling and control.

**The subject of research** is the assessment of qualitative characteristics (accuracy, reliability and absence of failures during numerical implementation) of models and modelling and control tools in the tasks of applied research of dynamic systems.

Keywords: [mathematical modeling](#), [mathematical model](#), [integral equations](#), [reliability of computational implementation](#), [solution accuracy](#), [ranking by error](#).

### List of publications of the applicant

*Scientific works in which the main scientific results of the dissertation are published.*

1. Prokofiev A. Yu. Analysis of errors in mathematical modelling of dynamic objects described by integral equations. *Computer science and mathematical methods in modelling*, 2022. Vol. 12, No. 3. P. 209-219. DOI [10.15276/imms.v12.no3.209](https://doi.org/10.15276/imms.v12.no3.209). The issue is included in the list of scientific professional publications of Ukraine, category «B».

URL: <http://immm.opu.ua/#a23>;

[http://immm.opu.ua/files/archive/n3\\_v12\\_2022/immm\\_n3\\_v12\\_2022.pdf](http://immm.opu.ua/files/archive/n3_v12_2022/immm_n3_v12_2022.pdf).

2. Prokofiev A. Yu. Precision calibration method in the implementation of mathematical models of dynamic systems in modelling and control problems. *Mathematical and computer modelling. Series: Technical sciences: collection of scientific works*, 2022. Issue 23. P 116-129. DOI [10.326226/2308-5916.2022-23.116-129](https://doi.org/10.326226/2308-5916.2022-23.116-129). The issue is included in the list of scientific professional publications of Ukraine, category «B».

URL: <http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/issue/archive>.

3. Lys D. A., Prokofiev A. Yu. Development and numerical implementation of a mathematical model of a gravitational wave at the boundary of a two-layer liquid system. *Computer science and mathematical methods in modelling*, Vol. 13, No 1–2. P. 97–103. DOI [10.15276/imms.v13.no1-2.97](https://doi.org/10.15276/imms.v13.no1-2.97). The issue is included in the list of scientific professional publications of Ukraine, category «B».

URL: <http://immm.opu.ua/#a23>;

[http://immm.opu.ua/files/archive/n3\\_v12\\_2022/immm\\_n1-2\\_v13\\_2023.pdf](http://immm.opu.ua/files/archive/n3_v12_2022/immm_n1-2_v13_2023.pdf).

4. Prokofiev A. Yu. Research on the accuracy indicators of models of nonlinear dynamic systems. *Mathematical and computer modelling. Series: Technical sciences: collection of scientific works*, 2023. Issue 24. P. 56–67. DOI: [10.326226/2308-5916.2023-24.56-67](https://doi.org/10.326226/2308-5916.2023-24.56-67). The issue is included in the list of scientific professional publications of Ukraine, category «B».

URL: <http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/issue/archive>.

5. Polozhaenko S. A., *Prokofiev A. Yu.* Models for determining the reliability of dynamic systems whose operation is characterized by a prevention mode. Scientific Notes of the V. I. Vernadsky TNU. Series: Technical Sciences, 2024. Vol. 35 (74), No. 1, P. 280-286. DOI: <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2024.1.1/42>. *The issue is included in the list of scientific professional publications of Ukraine, category «B».*

URL: <https://www.tech.vernadskyjournals.in.ua/35-74-1>.

6. Polozhaenko S. A., *Prokofiev A. Yu.* Estimation of Accuracy Indicators of Nonlinear Dynamic Systems. *Colloquium-journal*, 2024. Part 1. № 15 (208). P. 61–64. DOI: [10.24412/2520-6990-2024-15208-61-63](https://doi.org/10.24412/2520-6990-2024-15208-61-63).

URL: <https://colloquium-journal.org/wp-content/uploads/2024/06/Colloquium-journal-2024-208-1.pdf>.

7. Polozhaenko S. A., *Prokofiev A. Yu.* Parameters of the Runge-Kutta method with different orders of accuracy when integrating dynamics equations in modeling problems of non-stationary systems. *Computer science and mathematical methods in modelling*, 20224 Vol. 14, No. 1–2. P. 85–96. DOI [10.15276/imms.v14.no1-2.85](https://doi.org/10.15276/imms.v14.no1-2.85). *The issue is included in the list of scientific professional publications of Ukraine, category «B».*

URL: [http://immm.op.edu.ua/files/archive/n1-2\\_v14\\_2024/immm\\_n1-2\\_v14\\_2024.pdf](http://immm.op.edu.ua/files/archive/n1-2_v14_2024/immm_n1-2_v14_2024.pdf).

8. Polozhaenko S. A., *Prokofiev A. Yu.* Parametric reduction in the accuracy of mathematical models of dynamic objects of systems. Bulletin of Kremenchuk National University named after Mykhailo Ostrohradsky, 2024. Issue 6 (149). P. 125–131 DOI <https://doi.org/10.32782/1995-0519.2024.6.15>. *The issue is included in the list of scientific professional publications of Ukraine, category «B».*

URL: [https://visnikkrnu.kdu.edu.ua/visnik.php?id\\_nom=71](https://visnikkrnu.kdu.edu.ua/visnik.php?id_nom=71).

9. Polozhaenko S. A., *Prokofiev A. Yu.* Methods for controlling the reliability of computational implementation of dynamic systems models based on the use of control algorithms. Bulletin of the Kherson National Technical University, 2025. Issue 1 (92). Part 2. P. 185-193 DOI <https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2025.1.2.25>. *The issue is included in the list of scientific professional publications of Ukraine, category «B».*

URL: [https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk\\_kntu/issue/view/72](https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk_kntu/issue/view/72).

Scientific works that confirm the approbation of the dissertation materials.

10. *Prokofiev A.*, Baranov M. Analysis and modeling of anomalous diffusion processes with spatiotemporal characteristics. *Scientific Paradigm in the Context of Technologies and Society Development: proceedings of the 5<sup>th</sup> International Scientific and Practical Conference*, Geneva, 16-18 May 2023, Geneva, 2023. P. 454–458.

URL: <https://archive.interconf.center/index.php/conference-proceeding/issue/view/16-18.05.2023/164>

11. Lys D. A., *Prokofiev A. Yu.* Modelling the dynamic state of shock waves in vapor-liquid two-phase systems. *Modern Information Technologies 2023: materials of the XIII international scientific conference of students and young scientists*, Odesa, 18–19 May 2023, Odesa, 2023. P. 159–161.

URL: [https://drive.google.com/file/d/1ERFn923\\_zrEXiPcGj8S0dbSb4K6ToDE/view](https://drive.google.com/file/d/1ERFn923_zrEXiPcGj8S0dbSb4K6ToDE/view).

12. Use of dynamic neural networks for modelling nonlinear objects with significant nonlinearity / Polozhaenko S., Fomin O., Krikun V., Orlov A., *Prokofiev A.* *Mathematics and Informatics in Science and Education: Contemporary Challenges: Collection of Abstracts of the IV International Scientific and Practical Internet Conference*, Vinnica, 25–26 May 2023, Vinnica, 2023. P. 121–124.

URL: <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/791>

13. Use of Dynamic Neural Networks for Modeling Nonlinear Objects with Significant Nonlinearity / Fomin O., Polozhaenko S., Krikun V., Orlov A., *Prokofiev A.* *Annals of Computer Science and Intelligence System, Volume 37: preceding 18th Conference on Computer Science and Intelligence Systems*. Warsaw, 17–20 September 2023, Warsaw, 2023. P. 97–102. DOI: 10.15439/2023F3874.

URL: <https://annals-csis.org/proceedings/2023/drp/3874.html>

14. *Prokofiev A. Yu.*, Polozhaenko S. A. Improving the quality of the dynamic systems modeling process based on the precision calibration method. *Problems and prospects for the implementation and introduction of interdisciplinary scientific achievements: materials of the VI International Scientific Conference*, Bila Cerkva, 2

February 2024, Vinnica: UKRLOGOS Group LLC, 2024 P. 155–160. DOI: <https://doi.org/10.36074/mcnd-02.02.2024>.

URL: <https://archive.mcnd.org.ua/index.php/conference-proceeding/issue/view/02.02.2024/52>.

15. Error ranking method for assessing the accuracy of solving dynamic systems modelling problems / Polozhaenko S. A., *Prokofiev A. Yu.*, Lytynsky V. V., Tataryn O. V. *Modern information and electronic technologies: proceedings of the XXV International Scientific and Practical Conference, Odesa, 27–29 May 2024*, Odesa, 2023. P. 15–16.

URL: <https://www.old.tkea.com.ua/siet/archive/2024/15.pdf>.

16. Polozhaenko S. A., *Prokofiev A. Yu.* Evaluation of solutions to dynamic systems modeling problems based on the error ranking method. *Modern problems of mathematical modeling, forecasting and optimization: abstracts of the reports of the 10th International Scientific Conference. Kamianets-Podilskyi, 28–29 June 2024*, 2024. P Kamianets-Podolcky, 104–105.

URL: <http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/8145>.

17. Improving measurements accuracy in weight-in-motion systems using dynamic neural networks / Oleksandr Fomin, Sergii Polozhaenko, Petro Bidyuk, Oleksii Tataryn, *Andrii Prokofiev*. *Information Control Systems & Technologies (ICST 2024): proceedings of the 12th International Conference, Odesa, 23–25 September, 2024*. Odesa, 2024 P. 483–493.

URL: <https://ceur-ws.org/Vol-3790/paper42.pdf>. (Scopus).

18. Polozhaenko S. A., *Prokofiev A. Yu.* Adaptive method for controlling the reliability of computational implementation of dynamic systems models in the processes of their modeling and control. *Development Priorities for Technical Sciences in the Modern World: proceedings International scientific conference, Riga, 19–20 March 2025*, Riga, 2025. P. 35–39. DOI <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-542-6-9>

URL: <http://baltijapublishing.lv/omp/index.php/bp/catalog/book/578>.

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	24
ВСТУП	26
РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ ПІДХОДІВ ДО МАТЕМАТИЧНОЇ ФОРМАЛІЗАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ І УПРАВЛІННЯ	38
1.1 Особливості формалізації динамічних систем та середовищ моделями у вигляді диференціальних рівнянь	38
1.1.1 Застосування моделей у вигляді диференціальних рівнянь при формалізації динамічних систем в задачах їх моделювання та управління	38
1.1.2 Приклади динамічних систем та середовищ, що описуються моделями у вигляді диференціальних рівнянь	42
1.2 Особливості формалізації динамічних систем та середовищ моделями у вигляді інтегральних рівнянь	47
1.2.1 Застосування інтегральних моделей при формалізації задач аналізу динамічних систем та середовищ	47
1.2.2 Приклади динамічних систем та середовищ, що описуються моделями у вигляді інтегральних рівнянь	51
1.3 Математичне моделювання динамічних систем та середовищ на основі моделей, представлених диференціальними та інтегральними рівняннями	55
1.3.1 Числова реалізація ММ динамічних систем в задачах моделювання та управління	55
1.3.2 Числова реалізація диференціальних рівнянь як ММ динамічних систем	56
1.3.3 Розв'язування рівнянь Вольтерри в задачах аналізу (моделювання і ідентифікації) динамічних об'єктів та пошуку управління ними	60

1.3.4	Метод модельних прикладів щодо розв'язування рівнянь Фредгольма першого роду	66
1.4	Сталість математичних моделей динамічних систем, що апроксимуються інтегральними рівняннями	69
1.5	Загальні питання постановки задачі числового аналізу та дослідження похибок математичного моделювання динамічних систем	76
1.5.1	Постановка задачі числового аналізу та загальна характеристика похибок числових розв'язків при математичному моделюванні динамічних систем	76
1.5.2	Аналіз похибок математичного моделювання динамічних систем, які описуються диференціальними рівняннями	81
1.5.3	Аналіз похибок математичного моделювання динамічних систем, які описуються інтегральними рівняннями	83
	ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1	92
	РОЗДІЛ 2 МЕТОД РАНЖИРУВАННЯ ЗА ПОХИБКОЮ ДЛЯ ОЦІНКИ ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ ТА УПРАВЛІННЯ НИМИ	93
2.1	Аналітична формалізація процедури ранжирування на основі апарату диференціальних і інтегральних рівнянь в задачах моделювання та управління	93
2.2	Метод ранжирування за похибками при реалізації математичних моделей динамічних систем в задачах моделювання та управління	99
2.3	Побудова оцінок «знизу» функцій розподілу неусувної похибки реалізації ММ динамічних об'єктів, представлених диференціальними і інтегральними рівняннями, в задачах моделювання та управління із застосуванням методу ранжирування за похибкою	
2.3.1	Побудова оцінок «знизу» законів розподілу неусувної похибки,	121

які базуються на застосуванні гарантованих оцінок	
2.3.2 Апостеріорні оцінки законів розподілу неусувної похибки	127
2.4 Числове дослідження методу побудови оцінки «знизу» функцій розподілу неусувної похибки при розв'язуванні задач моделювання динамічних систем та управління ними	133
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2	135
РОЗДІЛ 3 МЕТОДИ КОНТРОЛЮ ДОСТОВІРНОСТІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В ПРОЦЕСАХ ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ	137
3.1 Визначення можливостей контролю алгоритмів числового розв'язування задач обчислювальної реалізації моделей динамічних систем	137
3.2 Екстраполяційний метод контролю	149
3.3 Інтерполяційний метод контролю	155
3.4 Адаптивний метод контролю	161
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3	170
РОЗДІЛ 4 ДОСВІД ПРАКТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ АНАЛІЗУ ПОХИБКИ ТА КОНТРОЛЮ ДОСТОВІРНОСТІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ	173
4.1 Прогнозне оцінювання точності моделювання первинного перетворювача сигналів акустичної емісії	177
4.2 Розробка та застосування завадостійких алгоритмів числового розв'язування рівнянь динаміки	183
4.3 Практичні заходи організації процедур визначення точності та контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем	195
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3	198
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ	199

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	202
ДОДАТОК А ДОКУМЕНТИ, ЩО ПІДТВЕРДЖУЮТЬ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ	230
ДОДАТОК Б САМОКОНТРОЛЬ ПРИ ВИКОНАННІ АЛГОРИТМУ МЕТОДУ ЗІ ЗРОСТАЮЧОЮ ТОЧНІСТЮ ОБЧИСЛЕНЬ В ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ	234
ДОДАТОК В СПОСОБИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ	237
ДОДАТОК Г СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА	250
ДОДАТОК Д ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ	254

## СПИСОК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧОК

ЗП	—	Зосереджені параметри (ЗП-об'єкти)
РП	—	Розподілені параметри (РП-об'єкти)
ГУ	—	Граничні умови
ММ	—	Математична модель
ПУ	—	Початкові умови
<b>A, B, C, D, E, F, d, e, g, x</b>	—	Матриці коефіцієнтів (вектори змінних)
$K[x, s, u(s)]$	—	Ядро інтегрального рівняння
$F[\cdot]$	—	Диференціальний оператор
$\mathbf{x}(t)$	—	Вектор вхідного сигналу
$\mathbf{y}(t)$	—	Вектор вихідної координати
$\mathbf{f}(t)$	—	Вектор зовнішніх збуджень
$\delta_j$	—	Похибка на кроці $j$ , $j = \overline{1, K}$ обчислювального процесу
$m$	—	Крок дискретизації за часом
$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$	—	Коефіцієнти впливу (або чутливості)
$\ \Delta \mathbf{x}\ $	—	Оцінка норми вектора похибок
$\varepsilon$	—	Вектор нев'язок
$Q$	—	Поверхня циліндру $\Omega \times t$
$T, t, t = [0, t_k]$	—	Період часу, незалежна часова координата, інтервал часу
$\sigma_{\Delta b_i}^2, \sigma_{\Delta a_{ij}}^2$	—	Дисперсії випадкових величин (вказаних у відповідних індексах)

$\ \boldsymbol{\varepsilon}_0\ _1, \ \boldsymbol{\varepsilon}_0\ _2, \ \boldsymbol{\varepsilon}_0\ _3$	— Функції розподілу для $p$ -квartilів
$C_{op}$	— Довірча оцінка похибки
$f_i(\tau)$	— Щільність ймовірності випадкової величини $\xi_i$
$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$	— Вектор змінних стану
$\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$	— Вектор управління
$D$	— Область допустимих значень міри
$\alpha, \beta, \gamma$	— Параметри контрольного алгоритму
$r_k$	— Порядок точності контрольного алгоритму
$\Omega, \Gamma, \bar{\Omega}$	— Просторова область та її границя, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ — замикання

Тлумачення інших скорочень та позначок, які не мають поширеного застосування, розкрито по тексту дисертаційної роботи.

## ВСТУП

**Актуальність теми дисертаційної роботи.** Розробка і удосконалення методів розрахунку та контролю процесів функціонування і експлуатаційних режимів технічних систем, в тому числі моделюючих та управляючих засобів як складових останніх, являє собою серйозну наукову проблему, яка має *актуальне* прикладне значення [1]–[9]. Насамперед, актуальність зазначеної проблеми пов'язано з *оцінкою точності та достовірності* реалізації досліджуваних технічних (зокрема, *динамічних*) систем на етапах їх аналізу (моделювання та ідентифікації), а також синтезу законів управління ними [10]–[14].

Проведення розрахунків з метою забезпечення якісної оптимізації параметрів динамічних систем за різними критеріями, організації ефективного виробничого та експлуатаційного контролю можливо лише на основі створення дієвих методів (та реалізуючих їх алгоритмів) аналізу процесів функціонування та точності складних структур і принципів схем динамічних систем, які проектуються та розробляються, а також засобів нової техніки [14]–[17]. При розробці вказаних методів та алгоритмів виникає комплекс складних наукових задач, рішення яких потребує проведення низки наукових досліджень.

Потребують дослідження наукові розробки, пов'язані зі створенням та запровадженням методів і отримуваних на їх основі обчислювальних алгоритмів щодо розв'язування задач аналізу процесів функціонування, забезпечення та контролю показників точності неперервних об'єктів і систем, що описуються *диференціальними, інтегральними та алгебраїчними* рівняннями. Об'єктами застосування методів та алгоритмів, які існують або потребують розробки, є *системи моделювання та управління*, їх елементи та вузли, спеціалізовані та універсальні обчислювальні засоби, що використовуються при розв'язуванні відповідних задач (зокрема, моделювання динамічних систем та управління ними).

Ефективним апаратом опису динамічних процесів у неперервних об'єктах при розв'язуванні прямих (моделювання), зворотних (управління) та інверсних

(ідентифікації) задач є диференціальні та інтегральні рівняння, що пов'язано з природною сутністю формування даних типів математичних виразів і наявністю в них незалежного параметру часу, який характеризує динамічну поведінку досліджуваних систем. Однак слід зауважити на виникнення певних труднощів при розв'язуванні диференціальних та інтегральних рівнянь, які, в ході реалізації задач моделювання динамічних систем та управління ними, розглядаються як *математичні моделі* (ММ) вказаних систем. Так, зокрема, при розв'язуванні диференціальних рівнянь можуть виникати проблеми збіжності розв'язків, а при розв'язуванні інтегральних рівнянь – некоректності розв'язків (наприклад, для рівнянь Вольтерри та Фредгольма I роду). Одним з важливих показників якості функціонування обчислювальних засобів, що застосовуються при розв'язуванні диференціальних та інтегральних рівнянь, є *стійкість* цих засобів. У зв'язку з цим виникають різного роду питання щодо стійкості обчислювальних засобів, які застосовуються для розв'язування систем алгебраїчних рівнянь, що формуються в результаті апроксимації первинних диференціальних та інтегральних рівнянь, прийнятих в якості ММ досліджуваних динамічних систем. Крім того, при розв'язуванні задач моделювання та управління виникає проблема аналізу точності відповідних *дискретних* моделей динамічних систем, що реалізуються обчислювальними засобами.

Також до «складних» проблем, які не мають на тепер універсального розв'язку, відноситься *оцінка точності* розв'язку задач моделювання та управління із застосуванням існуючого парку обчислювальних машин. Ця проблема потребує як розвиток існуючих, так і створення нових методів, що дозволяють отримати адекватні оцінки точності реалізації ММ динамічних систем у вигляді диференціальних або інтегральних рівнянь (тобто дискретних аналогів відповідних ММ) безпосередньо в ході розв'язування основної задачі моделювання (або управління) та таких (методів), які дозволяють приймати рішення щодо подальшого перебігу обчислювального процесу за основним алгоритмом розв'язку задачі моделювання (чи управління) або коригування останнього. Дієвим шляхом вирішення даної проблеми може розглядатися

розвиток та модифікація методів тарування. Даний підхід засновано на ідеї попереднього (тобто такого, що передує етапу основного розв'язку задачі із застосуванням обчислювальних засобів) розрахунку залежності похибки розв'язку від характеристик первинних похибок із залученням класифікації за точністю задач, які розв'язуються. Існуючі методи тарування віднайшли певне застосування на прикладі розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) [18]. При цьому, в якості норми вихідної оцінки неусувної похибки розв'язку, обирається відома оцінка норми вектору похибок, а за вихідну інформацію щодо первинних похибок використовуються їх ймовірнісні характеристики.

Слід зазначити, що при аналізі проблеми точності обчислювальної реалізації ММ динамічних систем виникає задача оцінки впливу відхилень параметрів динамічних систем (особливо нелінійних параметрів) на їх рух та показники якості функціонування. Як і при аналізі точності динамічних систем, так і при розв'язуванні задач їх синтезу з урахуванням умов точності, важливе значення має можливість аналітичного вираження додаткового руху системи. В даному випадку проблема точності постає на етапі формулювання виразів для відхилення траєкторії руху динамічної системи відносно опорної траєкторії та відносно збудженого руху. Дотично до цього постає проблема розробки алгоритмів раціонального визначення вузлів інтерполяції при обчисленні функціоналів від вихідних координат системи. Алгоритми відносяться до процедур, зокрема, вибору вузлів гаусових квадратур щодо обчислення показників якості систем моделювання та управління з найменшими похибками обчислень.

Аналіз точності в прикладних задачах дослідження як лінійних, так і нелінійних динамічних систем неодмінно пов'язано із застосуванням апаратних та програмних засобів обчислювальної техніки (ОТ). Це означає, що методи, які розробляються, мають бути реалізовані у вигляді пакетів прикладних програм (ППП), які мають бути поєднані між собою та складати єдине ціле.

Математичне моделювання являє собою потужний підхід до дослідження, розробки та проектування динамічних систем. Крім того ММ широко використовуються в якості складових частин систем управління та складних моделюючих комплексів, точність функціонування яких багато в чому визначається точністю процесів моделювання. У зв'язку з цим суттєве значення набувають методи аналізу, забезпечення та контролю точності процесів моделювання засобами ОТ. Похідною від цих методів постає задача *класифікації* відповідних методів контролю та організації *заводостійкого* обчислювального процесу при моделюванні динамічних систем. Кардинально постає задача формування структур *заводо захищених* алгоритмів, які містять в собі блоки розв'язування основної задачі, виконання контрольного алгоритму та управління щодо прийнятого рішення стосовно подальшого перебігу обчислювального процесу (з урахуванням точності отриманого розв'язку). Також повинні враховуватися оцінки часових витрат на реалізацію алгоритмів контролю, що особливо важливо при розв'язуванні задач управління в реальному масштабі часу. Потребує подальшого розвитку коло питань, пов'язаних з принципами побудови методів контролю, що базуються на інформації, отриманій до процедур контролю, в ході виконання контролю, або таких, що є адаптивними до інформації, яка наявна на момент виконання контролю.

Як актуальну проблему щодо забезпечення точності заводозахищеності обчислювального процесу в ході розв'язування задач моделювання динамічних систем та управління ними слід позначити створення методів, що забезпечують *зростаючу точність обчислень*.

Важливим питанням при організації процесів алгоритмічного контролю є вибір та обґрунтування критеріїв прийняття рішень щодо наявності або відсутності *заводи* (збою) в основному обчислювальному процесі. Важливою вимогою організації алгоритмічного контролю має бути те, що система прийняття рішення має будуватися на основі уведених мір точності обчислень та допустимої області значень цієї міри. З метою оцінки результатів дії алгоритмів контролю має забезпечуватися *достовірність* контролю, що визначає виявлення *похибок*,

пов'язаних з недосконалістю методу контролю та похибкою, яка вноситься при корекції основних значень (величин), що обчислюються.

У прикладному аспекті розв'язування питань побудови моделей та комп'ютерно-орієнтованих методів аналізу достовірності реалізації динамічних систем виникає в низці трудомістких задач забезпечення точності при проектуванні, виробництві (контролі технічної якості) та експлуатації різноманітних складних технічних об'єктів (зокрема, електронної апаратури, систем управління та діагностики, мехатронних систем тощо). При рішенні цих задач ефективним, та чи не єдиним підходом, є *математичне моделювання* (сукупності взаємопов'язаних прямої, зворотної та індуктивної задач, або інакше задач: моделювання, управління та ідентифікації), в основу якого покладено застосування та обчислювальна реалізація ММ різного типу.

На теперішній час відомі роботи зарубіжних вчених в галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, зокрема таких як: Bernard C., Flajolet P., Sedgewick R., Gay M., Zhang L., Liu W. K., Mitson A. P., Kakalis N., Luenberger D. G. та ін.

Вагомий внесок в розробку проблем математичного моделювання динамічних систем та теорії управління ними зроблено вітчизняними вченими, зокрема, Мацевитим Ю. М., Прокоф'євим В. Є, Згуровським М. З., Бідюком П. І., Гаращенком Ф. Г., Скопечким В. В., Наконечним О. Г, Кветним Р. Н, Пупеною О. М.

Значний доробок в теорію та практику математичного моделювання, пов'язаний з широким колом питань методологічного забезпечення розв'язків диференціальних і інтегральних рівнянь як моделей динамічних систем та розробки відповідних комп'ютерних засобів їх реалізації, внесено визнаним вітчизняним вченим чл.-кор. НАПН України, д.т.н., професором Верланем А. Ф. та представниками створеної ним наукової школи (Палагін В. В., Федорчук В. А., Ситник О. О., Іванюк В. А. та ін.). Багаторічно плідно розвивається напрямок моделювання та ідентифікації динамічних систем в рамках апарату інтегральних рівнянь, започаткований в Національному університеті «Одеська політехніка»

д.т.н., професором Павленком В. Д., та його учнями (Фомін О. О., Сперанський В. О., Масрі М. М., Ломовой В. І., Шаманіна Т. В.).

Однаке, не зважаючи на наявність значної кількості робіт, присвячених побудові, а також числовій і комп'ютерній реалізаціям ММ динамічних систем, представлених диференціальними та інтегральними рівняннями, залишаються не в повній мірі дослідженими питання *оцінки точності та достовірності* отриманих розв'язків цих рівнянь в прикладних задачах моделювання та управління.

Таким чином, на сьогодні, при розв'язуванні переважної більшості задач в практиці моделювання динамічних систем та синтезу управління ними, спостерігається *наявність протиріччя*: за наявності добре розвинутої модельної та методологічної підтримки засобів математичного моделювання промислово важливих та природно значимих динамічних систем, недостатній розвиток набули питання оцінки точності та достовірності розв'язків відповідних рівнянь як моделей динамічних систем, а також виявлення збоїв (завад) в обчислювальному процесі.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, темами, планами.** Чинну дисертаційну роботу виконано у відповідності до пріоритетних напрямків науково-дослідних робіт Національного університету «Одеська політехніка», згідно координаційних планів Міністерства освіти і науки України, зокрема, в рамках наукових досліджень за держбюджетною науково-дослідною роботою (НДР): «Методи та програмні засоби інтерпретації моделей машинного навчання непараметричних динамічних об'єктів» №210-63, 2021 – 2025 р. р. (№ держ. реєстрації 0122U002161).

**Мета та задачі дослідження.** Метою дисертаційного дослідження є розробка методів прогнозування точності і аналізу достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем, представлених у класах диференціальних та інтегральних рівнянь – при розв'язуванні прикладних задач моделювання і

управління на їх основі, шляхом визначення показників якості задіяних комп'ютерних та програмно-алгоритмічних інструментальних засобів.

Для досягнення вказаної мети дослідження в дисертаційній роботі було **поставлено та розв'язано наступні задачі:**

- розглянуто існуючі підходи до математичної формалізації динамічних систем в задачах їх моделювання і управління, в результаті чого показано особливості опису динамічних систем моделями у вигляді диференціальних та інтегральних рівнянь різних типів;

- виконано аналіз методів числової реалізації диференціальних та інтегральних рівнянь як математичних моделей динамічних систем, а також похибок, які виникають при цьому;

- розроблено метод ранжирування за похибкою для оцінки точності розв'язування задач моделювання динамічними системами та управління ними;

- побудовано (на основі методу ранжирування за похибкою) оцінки «знизу» функцій розподілу неусувної похибки реалізації математичних моделей динамічних об'єктів, представлених диференціальними та інтегральними рівняннями, в задачах моделювання і управління;

- розроблено методи (екстраполяційний, інтерполяційний та адаптивний) контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем в процесах їх моделювання та управління;

- опрацьовано досвід практичного застосування методів ранжирування за похибкою та контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем в задачах їх моделювання та управління.

**Об'єктом досліджень** є процеси математичного моделювання динамічних систем в задачах їх моделювання та управління.

**Предметом дослідження** є оцінки якісних характеристик (точності, достовірності та відсутності збоїв при числовій реалізації) моделей та засобів моделювання і управління в задачах прикладного дослідження динамічних систем.

**Методи досліджень.** В дисертаційній роботі застосовано апарат рівнянь математичної фізики; окремі положення теорій числового аналізу, похибок та математичної статистики; методи організації комп'ютерних засобів моделювання (управління) та обчислювального експерименту.

**Наукова новизна** результатів, які виносяться на захист, полягає в тому, що *вперше*:

– запропоновано метод ранжирування за похибкою при розв'язуванні задач моделювання динамічних систем та управління ними, який, на відміну від відомих, зокрема, методів оцінювання точності числового розв'язування рівнянь математичної фізики, дозволяє попередньо (до початку процесу комп'ютерного розв'язування задачі) виконати розрахунок залежності похибки розв'язку від характеристик первинних похибок із залученням класифікації за точністю задач, що розв'язуються;

– запропоновано метод контролю достовірності обчислювальної реалізації ММ динамічних систем зі зростаючою точністю, який, на відміну від методів «прогноз – корекція», забезпечує послідовне отримання значення шуканої функції стану динамічної системи з порядком точності локальної похибки, який (порядок) збільшується;

– запропоновано методи контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем в процесах їх моделювання та управління, засновані на ідеї введення контрольного алгоритму, який виконується на етапі числового розв'язування поставленої (основної) задачі, але такого, що простіший за основний; причому, запропоновані методи контролю достовірності, дозволяють досягнути підвищення останньої за рахунок застосування в контрольному алгоритмі інформації, яку вже проконтрольовано на попередніх кроках основного алгоритму (екстраполяційний метод), або дозволяють організувати неявний контроль, що забезпечує зменшення діапазону відхилення величини, яка контролюється від контрольної, тобто дозволяють знизити рівень шуму (інтерполяційний метод);

– запропоновано критерії щодо прийняття рішення про наявність або відсутність похибки (збою) в основному обчислювальному алгоритмі розв'язування задач моделювання динамічних систем та управління ними, що дозволило сформулювати систему прийняття рішень при контролі достовірності (яка ґрунтується на основі уведених поняттях міри точності обчислень та допустимої області значень цієї міри), а також розробити адаптивні методи контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем, які забезпечують визначення параметрів контрольного алгоритму з умови мінімуму певної міри близькості результатів, отриманих за контрольним та основним алгоритмами.

**Практична цінність** роботи полягає в тому, що запропоновані методи прогнозу точності і аналізу достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем дозволяють розширити клас важливих для практики задач моделювання та управління вказаними системами, а розроблені алгоритми, що покладено в основу запропонованих методів, орієнтовано на розв'язування широкого кола інженерних та дослідницьких задач, які виникають при аналізі динамічних систем та управлінні ними.

Застосування розроблених прикладних алгоритмів прогнозування точності та достовірності числової реалізації ММ динамічних систем дозволяють забезпечити бажану точність, а також зменшити у (1,4...2,5) рази кількість збоїв в процесі розв'язування реальних задач моделювання динамічних систем та управління ними.

Розроблені методи аналізу точності та достовірності обчислювальної реалізації ММ моделей динамічних систем запроваджено в ТОВ «Нафтогазхім Сервіс» (ТОВ «НГХ Сервіс»), де їх включено до складу програмно-алгоритмічного забезпечення діючої АСУ ТП.

Результати, отримані в дисертаційній роботі, використано при розробці лекційних курсів та відповідних циклів лабораторних робіт, з дисциплін: «Числові методи», «Комп'ютерне моделювання процесів і систем», «Ідентифікація та

моделювання процесів» і «Моделі та інструментальні засоби математичного моделювання технологічних процесів», які поставлено і читаються на кафедрі комп'ютеризованих систем та програмних технологій Національного університету «Одеська політехніка».

**Особистий внесок здобувача в працях, опублікованих із співавторами.**

Наукові положення, висновки та рекомендації, які викладено у дисертаційній роботі, і які виносяться на захист, отримано особисто здобувачем та узагальнено під час оформлення дисертаційної роботи. Наукові праці [19], [20], [22] виконано автором самостійно. В працях, опублікованих у співавторстві [21], [23]–[36], автору належать вибір наукового напрямку, постановка задач та способи їх розв'язування, теоретичне обґрунтування методології та інтерпретація результатів досліджень. Зокрема, автору належать:

– в [22] – метод та алгоритм числової реалізації ММ гравітаційної хвилі на границі поділу двошарової рідинної системи;

– в [23] – моделі та метод обчислення узагальненого показника надійності для стратегій профілактики;

– в [24] – формування оцінок показників точності при числовій реалізації ММ нелінійних динамічних систем;

– в [25] – аналітичні вирази обчислення необхідного порядку методу Рунге-Кутти при визначенні кроку інтегрування на етапі реалізації ММ динамічної системи, що забезпечує необхідну точність шуканого розв'язку;

– в [26] – метод спрощення ММ складних динамічних об'єктів, який забезпечує задану точність моделювання при зменшенні розмірності вектору параметрів вихідної ММ;

– в [27] – методи аналізу достовірності обчислювальної реалізації ММ динамічних систем (зі зростаючою точністю обчислень, екстраполяційний та інтерполяційний);

– в [28] – ММ аномальних дифузійних процесів з просторово-часовими характеристиками;

- в [29] – ММ та алгоритм числової реалізації ММ динамічного стану ударних хвиль у парорідинних двофазних системах;
- в [30] – ММ нелінійних об'єктів із суттєвою нелінійністю та оцінка точності їх (моделей) реалізації;
- в [31] – аналіз точності реалізації ММ нелінійних об'єктів із суттєвою нелінійністю;
- в [32] – прогнозування залежності похибки числової реалізації ММ динамічних об'єктів від характеристик первинних похибок;
- в [33] – метод ранжирування за похибкою в задачах моделювання динамічних систем;
- в [34] – оцінки розв'язків задач моделювання динамічних систем на основі методу ранжування за похибкою;
- в [35] – оцінки точності вимірювань у системах зважування для рухомих об'єктів (в динаміці);
- в [36] – критерії визначення наявності збою та адаптивний метод контролю достовірності при числовій реалізації ММ динамічних систем.

**Апробація результатів дисертації.** Основні теоретичні положення та отримані практичні результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на: V International Scientific and Practical Conference Scientific Paradigm in the Context of Technologies and Society Development (May 16-18, 2023 in Geneva, Switzerland); XIII Міжнародній науковій конференції студентів та молодих вчених «Сучасні інформаційні технології – 2023 (MIT2023)» (18-19 травня, 2023, Одеса, Україна); IV International Scientific and Practical Internet Conference «Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity» (May 25-26, 2023, Vinnytsia, Ukraine); 18th Conference on Computer Science and Intelligence Systems. (17–20 September, 2023, Warsaw, Poland); VI Міжнародній науковій конференції «Проблеми та перспективи реалізації та впровадження міждисциплінарних наукових досягнень: матеріали» (2 лютого, 2024, Біла Церква, Україна); XXV Міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні інформаційні та електронні технології» (27-29 травня, 2024, Одеса,

Україна); 10-й Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (28-29 червня, 2024, Кам'янець-Подільський, Україна); 12th International Conference Information Control Systems & Technologies (ICST 2024) (23–25 September, 2024, Odesa, Ukraine) – CEUR; International scientific conference «Development Priorities for Technical Sciences in the Modern World» (19–20, March, 2025. Riga, Republic of Latvia).

**Публікації.** Основні наукові результати дисертаційної роботи викладено у 18-ти наукових роботах, в тому числі: у 8-ми статтях, які опубліковано у виданнях, включених до Переліку фахових видань України (категорії «Б») та індексуються у міжнародних наукометричних базах даних (зокрема, Index Copernicus International, Ulrich's Periodicals Directory, Electronic Journals Library, Google Scholar); у 1-й статті, яку опубліковано у зарубіжному виданні, а також у 9-ти тезах Міжнародних наукових конференцій (матеріали однієї з яких проіндексовано у наукометричній базі Scopus).

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаної літератури з 290 найменувань (на 29 сторінках), 5 додатків (на 25 сторінках), 11 рисунків та 5 таблиць. Загальний обсяг дисертаційної роботи складає 255 сторінок, в тому числі 190 сторінок основного тексту.

# 1 АНАЛІЗ ПІДХОДІВ ДО МАТЕМАТИЧНОЇ ФОРМАЛІЗАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ І УПРАВЛІННЯ

Під динамічною системою у подальшому будемо вважати будь-який об'єкт або процес (зокрема, фізичний, обчислювальний чи інформаційний) для якого у довільний момент часу може бути встановлено поняття *стану*, що визначає поведінку означеного об'єкта або процесу у вигляді *функції* (лінійної чи нелінійної) від кінцевої множини параметрів, причому час розглядається як незалежний параметр у даній множині.

В даному розділі проаналізовано та обґрунтовано застосування апаратів диференціальних та інтегральних рівнянь в якості модельної підтримки при формалізації задач аналізу динамічного стану систем та середовищ різної фізичної природи. Також досліджено переваги та недоліки відомих обчислювальних методів і реалізуючих їх алгоритмів розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь, що являють собою математичні моделі (ММ) динамічних систем та середовищ. Визначено особливості використання комп'ютерних засобів при математичному моделюванні та пошуку законів управління на основі динамічних моделей у вигляді диференціальних та інтегральних рівнянь різних типів.

На типових прикладах в галузі техніки і хімічних технологій, а також природно-значимого характеру, показано процедуру складання ММ динамічних систем на основі застосування апарату диференціальних та інтегральних рівнянь, ґрунтуючись на фундаментальних фізичних законах (збереження маси, енергії, руху, імпульсу тощо).

## 1.1 Особливості формалізації динамічних систем та середовищ моделями у вигляді диференціальних рівнянь

### 1.1.1 Застосування моделей у вигляді диференціальних рівнянь при формалізації динамічних систем в задачах їх моделювання та управління.

Враховуючи дане вище визначення динамічної системи, очевидно, що у

загальному вигляді її ММ можна представити у формі *нелінійного* диференціального рівняння таким чином:

$$F[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \dots, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), \ddot{\mathbf{y}}(t), \dots, \mathbf{f}(t), \dot{\mathbf{f}}(t), \ddot{\mathbf{f}}(t), \dots] = 0, \quad (1.1)$$

де у квадратних дужках представлено вектори вхідного сигналу  $\mathbf{x}(t)$ , вихідної координати  $\mathbf{y}(t)$  та зовнішніх збуджень  $\mathbf{f}(t)$  разом з їх похідними, що характеризують динамічну систему, відповідно.

Частинним випадком рівняння (1.1) є *лінійне* диференціальне рівняння, яке може бути отримано з рівняння (1.1) або за умови нехтування (в певних межах) нелінійністю диференціального оператора функції  $F[\cdot]$ , або лінеаризацією в усталеному режимі (коли складові векторів  $\mathbf{x}(t)$  та  $\mathbf{y}(t)$  мало відхиляються від їх програмних, тобто заданих, значень  $\mathbf{x}^0(t)$  та  $\mathbf{y}^0(t)$ ). Тоді для усталеного режиму можна записати:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0(t) + \Delta\mathbf{x}(t); \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}^0(t) + \Delta\dot{\mathbf{x}}(t); \ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}^0(t) + \Delta\ddot{\mathbf{x}}(t); \dots,$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^0(t) + \Delta\mathbf{y}(t); \dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{y}}^0(t) + \Delta\dot{\mathbf{y}}(t); \ddot{\mathbf{y}}(t) = \ddot{\mathbf{y}}^0(t) + \Delta\ddot{\mathbf{y}}(t); \dots$$

Після цього, розкладаючи в ряд Тейлора ліву частину рівняння (1.1), отримаємо (зовнішнє збудження  $\mathbf{f}(t)$  та його похідні при лінеаризації не розглядається, оскільки, як правило, вони не можуть бути вимірними, та не мають програмних значень):

$$F^0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^0 \Delta x_n + \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right)^0 \Delta \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0 \Delta \dot{x}_2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n}\right)^0 \Delta \dot{x}_n + \dots +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\partial F}{\partial y_1} \right)^0 \Delta y_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial y_2} \right)^0 \Delta y_2 + \dots + \left( \frac{\partial F}{\partial y_m} \right)^0 \Delta y_m + \\
& + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_1} \right)^0 \Delta \dot{y}_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_2} \right)^0 \Delta \dot{y}_2 + \dots + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_n} \right)^0 \Delta \dot{y}_n + \dots = 0, \quad (1.2)
\end{aligned}$$

де  $n$  та  $m$  відповідно порядки векторів  $\mathbf{x}(t)$  та  $\mathbf{y}(t)$ .

Інакше лінеаризоване диференціальне рівняння (1.2), або ММ динамічної системи у вигляді лінійного диференціального рівняння, може бути представлено наступним чином:

$$\begin{aligned}
& a_{0_1} \frac{d^q y_1(t)}{dt^q} + a_{1_1} \frac{d^{q-1} y_1(t)}{dt^{q-1}} + \dots + a_{q_1} y_1(t) + \\
& a_{0_2} \frac{d^q y_2(t)}{dt^q} + a_{1_2} \frac{d^{q-1} y_2(t)}{dt^{q-1}} + \dots + a_{q_2} y_2(t) + \dots + \\
& + a_{0_m} \frac{d^q y_m(t)}{dt^q} + a_{1_m} \frac{d^{q-1} y_m(t)}{dt^{q-1}} + \dots + a_{q_m} y_m(t) + \dots = \\
& = b_{0_1} \frac{d^v x_1(t)}{dt^v} + b_{1_1} \frac{d^{v-1} x_1(t)}{dt^{v-1}} + \dots + b_{v_1} x_1(t) + \\
& + b_{0_2} \frac{d^v x_2(t)}{dt^v} + b_{1_2} \frac{d^{v-1} x_2(t)}{dt^{v-1}} + \dots + b_{v_2} x_2(t) + \dots + \\
& + b_{0_n} \frac{d^v x_n(t)}{dt^v} + b_{1_n} \frac{d^{v-1} x_m(t)}{dt^{v-1}} + \dots + b_{v_n} x_n(t), \quad (1.3)
\end{aligned}$$

$$\text{де } a_{q_1} = \left( \frac{\partial F}{\partial y_1} \right)^0, \quad a_{(q-1)_1} = \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_1} \right)^0, \quad \dots, \quad a_{0_1} = \left( \frac{\partial F}{\partial y_1^{(q)}} \right)^0, \quad \dots, \quad b_{v_1} = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^0,$$

$$b_{(v-1)_1} = \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \right)^0, \quad \dots, \quad b_{0_1} = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1^{(v)}} \right)^0,$$

$v$  та  $q$  – вищі ступені похідних складових векторів  $\mathbf{x}(t)$  та  $\mathbf{y}(t)$ , відповідно.

До рівняння (1.3) може бути застосовано перетворення Лапласа [37]–[40], що зводить його до *операторної форми*:

$$\begin{aligned} & \left( a_{0_1} p^q + a_{1_1} p^{q-1} + \dots + a_{(q-1)_1} p + a_{q_1} + a_{0_2} p^q + a_{1_2} p^{q-1} + \dots + a_{(q-1)_2} p + a_{q_2} + \right. \\ & \quad \left. + a_{0_m} p^q + a_{1_m} p^{q-1} + \dots + a_{(q-1)_m} p + a_{q_m} \right) \mathbf{Y}(p) = \\ & \left( b_{0_1} p^v + b_{1_1} p^{v-1} + \dots + b_{(v-1)_1} p + b_{v_1} + b_{0_2} p^v + b_{1_2} p^{v-1} + \dots + b_{(v-1)_2} p + b_{v_2} + \right. \\ & \quad \left. + b_{0_n} p^v + b_{1_n} p^{v-1} + \dots + b_{(v-1)_n} p + b_{v_n} \right) \mathbf{X}(p). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Якщо в рівнянні динаміки виду (1.4) взяти відношення зображення вектору  $\mathbf{y}(t)$  (тобто  $\mathbf{Y}(p)$ ) до зображення вектору  $\mathbf{x}(t)$  (тобто  $\mathbf{X}(p)$ ) при нульових початкових умовах ( $\mathbf{x}(0) = \dot{\mathbf{x}}(0) = \ddot{\mathbf{x}}(0) = \dots = \mathbf{y}(0) = \dot{\mathbf{y}}(0) = \ddot{\mathbf{y}}(0) = \dots = 0$ ) та відсутності зовнішніх збуджень ( $\mathbf{f}(t) = 0$ ), то, у підсумку, можна отримати *передаточну функцію* динамічної системи у вигляді *операторного коефіцієнта передачі*, а саме:

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}(p)/\mathbf{X}(p) = \mathbf{W}(p) = \\ & \left[ \left( a_{0_1} p^q + a_{1_1} p^{q-1} + \dots + a_{(q-1)_1} p + a_{q_1} + a_{0_2} p^q + a_{1_2} p^{q-1} + \dots + a_{(q-1)_2} p + a_{q_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + a_{0_m} p^q + a_{1_m} p^{q-1} + \dots + a_{(q-1)_m} p + a_{q_m} \right) \right] / \left[ \left( b_{0_1} p^v + b_{1_1} p^{v-1} + \dots + b_{(v-1)_1} p + b_{v_1} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + b_{1_2} p^{v-1} + \dots + b_{(v-1)_2} p + b_{v_2} + b_{0_n} p^v + b_{1_n} p^{v-1} + \dots + b_{(v-1)_n} p + b_{v_n} \right) \right]; \\ & \mathbf{x}(0) = \dot{\mathbf{x}}(0) = \ddot{\mathbf{x}}(0) = \dots = \mathbf{y}(0) = \dot{\mathbf{y}}(0) = \ddot{\mathbf{y}}(0) = \dots = 0, \quad \mathbf{f}(t) = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

ММ у формі (1.3) переважно застосовуються при аналізі (ідентифікації та моделюванні, зокрема, математичному та комп'ютерному) динамічних систем, а у формі (1.5) – при синтезі управління ними.

Розглянуті вище ММ динамічних систем у вигляді рівнянь (1.1), (1.3) та їх операторних аналогів (1.4), (1.5), представлено в класі диференціальних рівнянь у *повних похідних* (чи – *звичайних* диференціальних рівнянь (ЗДР)), тобто у випадку,

коли шукана функція  $y(t)$  (або, як у випадках, що розглянуто вище – вектор-функція  $\mathbf{y}(t)$ ) є функцією одного незалежного параметру  $t$  – часу.

На відміну від цього, у практичних додатках, поширено також представлення ММ динамічних систем у формі диференціальних рівнянь у *частинних похідних* (ДРЧП), що у загальному вигляді можна представити як:

$$F \left\{ \mathbf{x}(t), \Phi[\mathbf{x}(t)], \frac{\partial \Phi[\mathbf{x}(t)]}{\partial x_1(t)}, \dots, \frac{\partial \Phi[\mathbf{x}(t)]}{\partial x_n(t)}, \frac{\partial^2 \Phi[\mathbf{x}(t)]}{\partial x_1^2(t)}, \dots, \frac{\partial^2 \Phi[\mathbf{x}(t)]}{\partial x_n^2(t)}, \dots, \frac{\partial^v \Phi[\mathbf{x}(t)]}{\partial x_1^v(t)}, \dots, \frac{\partial^v \Phi[\mathbf{x}(t)]}{\partial x_n^v(t)} \right\} = 0, \quad (1.6)$$

де  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t$  – незалежні змінні;

$\Phi[\mathbf{x}(t)] = \Phi[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$  – шукана функція цих змінних.

При цьому диференційний оператор  $F\{\cdot\}$  може містити частинні похідні різного виду та порядку та бути як *лінійним*, так і *нелінійним*.

Наведені вище типи диференціальних рівнянь є *природною* формою опису *еволюції* (тобто розвитку в часі) реальних об'єктів та процесів, зокрема таких, що зазнають короткотерміновий («миттєвий») вплив. Основна перевага, яка визначає широке застосування в якості ММ динамічних систем диференціальних рівнянь різних типів, полягає в тому, що останні містять *похідні* – тобто відображають швидкість зміни вхідних та вихідних сигналів (суть – їх *динаміку*), що є суттєвою характеристикою динамічних систем як таких.

**1.1.2 Приклади динамічних систем та середовищ, що описуються моделями у вигляді диференціальних рівнянь.** При формалізації динамічних об'єктів і процесів в технічних системах та математичному описі еволюційних фізичних явищ природного походження широко застосовуються диференціальні рівняння різних типів. Наведемо низку прикладів такого застосування.

*Приклад 1.1.* Розглянемо побудову ММ генератора постійного струму [41]. Вхідним сигналом  $x(t)$  для генератора виступає напруга збудження  $u_3(t)$ , що подається на обмотку збудження, а вихідною величиною  $y(t)$  – напруга на щітках якоря генератора  $u_r(t)$ . Збуджуючим впливом  $f(t)$  виступає струм обмотки якоря  $i_r(t)$ , величина якого залежить від під'єданого до генератора навантаження у вигляді опору  $r_n$ . В такому разі, очевидними є наступні співвідношення:

$$u_r(t) = E(t) - i_r(t)r_y, \quad E(t) = ki_3(t), \quad i_3(t) = u_3(t)/r_3$$

де  $E(t)$  – електрорушійна сила (ЕРС), В;

$i_3(t)$  – струм збудження, А;

$r_3, r_y$  – опори обмоток збудження та якоря, відповідно, Ом;

$k$  – коефіцієнт, що залежить від конструктивного виконання генератора.

Тоді, на підставі другого закону Кірхгофа, для обмотки збудження:

$$u_3(t) = i_3(t)r_3 + L_3 \frac{di_3}{dt},$$

де  $L_3$  – індуктивність обмотки збудження, Гн.

З урахуванням виразу для струму збудження  $i_3(t)$  та ЕРС  $E(t)$ , остаточно отримаємо ММ генератора постійного струму

$$T \frac{du_r(t)}{dt} + u_r(t) = ku_3(t) - Tr_y \frac{di_r(t)}{dt}, \quad (1.7)$$

де  $T = L_3 r_3$  – постійна часу обмотки збудження, с.

Останнє рівняння в операторній формі має вигляд:

$$U_r(Tp + 1) = kU_z - I_{я}r_{я}(Tp + 1). \quad (1.8)$$

Аналогічним чином можна отримати ММ інших електромашинних пристроїв (двигунів, електромашинних підсилювачів, трансформаторів, тяглових реле тощо), поширених в системах автоматики та електроприводу.

*Приклад 1.2.* Типовими прикладами застосування диференціальних рівнянь в якості моделей динамічних систем можуть бути ММ хімічних процесів та апаратів. Зокрема, хімічна реакція рідинного переходу речовини  $A$  в речовину  $B$  виду  $A \rightarrow B$ , яка відбувається в диспенсері з постійним перемішуванням [42]–[44], описується наступною динамічною моделлю

$$\frac{d\chi(t)}{dt} = -\chi(t) + S_a [1 - \chi(t)] e^{\frac{\chi_2(t)}{1 + [T_d(t)/\psi]}} + \Delta T_1, \quad (1.9)$$

$$\frac{dT_d(t)}{dt} = -(1 - \beta)T_d(t) + G S_a [1 - \chi(t)] e^{\frac{\chi_2(t)}{1 + [T_d(t)/\psi]}} + \beta \Theta(t) + \Delta T_2, \quad (1.10)$$

$$y = T_d(t), \quad (1.11)$$

де  $\chi(t)$  – відносна доля, що характеризує ступінь (суть – швидкість) переходу речовини  $A$  в речовину  $B$ ;

$T_d(t)$  – температура в диспансері, К;

$S_a, G, \beta, \psi$  – конструктивні параметри диспенсера;

$\Theta(t)$  – температура охолоджуючої рідини, за допомогою якої забезпечується бажана швидкість реакції  $A \rightarrow B$  (управляюча величина);

$\Delta T_1, \Delta T_2$  – відхилення температури та концентрації речовин в диспансері

від заданих уставок, що мають фізичний смисл збуджень.

Рівняння спостереження (1.10) визначає, що контролюється лише температура в диспенсері.

ММ у вигляді (1.9) – (1.11) являє собою *нелінійну* динамічну модель.

У разі значних геометричних розмірів просторової області  $\Omega$ , де відбувається динамічний процес (наприклад, розміри хімічних технологічних апаратів), ММ динамічних систем коректно представляти диференціальними рівняннями у *частинних* похідних. Прикладом такої ММ може слугувати модифікація ММ виду (1.9)–(1.11), в разі, якщо реакція переходу  $A \rightarrow B$  відбувається у трубчастому диспенсері з рідинним охолодженням стінок останнього [45], [46]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi(r, x, t)}{\partial t} = & (r^2 - 1) \frac{\partial \chi(r, x, t)}{\partial z} + \frac{1}{P_m} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \chi(r, x, t)}{\partial r} \right] + \\ & + S_a [1 - \chi(r, x, t)] e^{\frac{T_d(r, x, t)}{1 + [T_d(r, x, t)/\psi]}}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_d(r, x, t)}{\partial t} = & (r^2 - 1) \frac{\partial T_d(r, x, t)}{\partial x} + \frac{1}{P_h} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial T_d(r, x, t)}{\partial r} \right] + \\ & + G S_a [1 - \chi(r, x, t)] e^{\frac{T_d(r, x, t)}{1 + [T_d(r, x, t)/\psi]}}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

з початковими

$$\chi(r, x, t)|_{t=0} = \chi(r, x, 0); \quad T_d(r, x, t)|_{t=0} = T_d(r, x, 0), \quad (1.14)$$

та граничними умовами

$$x = 0: \quad \chi(r, x, t) = T_d(r, x, t) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 r = 0: \quad \partial\chi(r, x, t)/\partial r = \partial T_d(r, x, t)/\partial r = 0, \\
 r = 1: \quad \partial\chi(r, x, t)/\partial r = 0, \partial T_d(r, x, t)/\partial r = G_{\omega} [\Theta(x, t) - T_d(r, x, t)] , \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

де  $\chi(r, x, t)$ ,  $T_d(r, x, t)$  – розподілені функції швидкості та температури реакції  $A \rightarrow B$  в диспенсері, відповідно;  
 $\Theta(x, t)$  – розподілена (лише по висоті зовнішньої стінки диспенсера) функція температури охолоджуючої рідини (управляюча величина);  
 $r, x$  – радіальний та лінійний розмір внутрішньої порожнини диспенсера, відповідно (незалежні параметри);  
 $t$  – незалежний параметр часу;  
 $P_m, P_h, S_a, G, g_{\omega}, \psi$  – конструктивні параметри емульгатора.  
Рівняння системи вимірювання мають вигляд

$$y_i(t) = T_d(r_i, x_i, t), i = 1, 2, \dots, N \quad (1.16)$$

і описують систему розподілених вимірювачів (термопар), розташованих у точках  $(r_i, x_i), i = 1, 2, \dots, N$  по висоті диспенсера. Принагідно зазначимо, що управління у випадку, який розглядається (тобто температура  $\Theta(x, t)$ ), входить у граничні умови – ситуація досить типова для поверхневих апаратів хімічних технологій.

*Приклад 1.3.* Формалізацію явищ природного походження на основі диференціальних рівнянь розглянемо на прикладі динаміки популяції риби, яка існує у відносно великому замкненому озері. ММ в даному випадку досить точно описує диференціальне рівняння Ферхюльста (Verhulst), відоме також як логістичне рівняння [47], [48]:

$$dP(t)/dt = P(\beta - \delta P(t)), \quad (1.17)$$

де  $P(t)$  – функція, яка являє собою популяцію риби, що вимірюється у

десятках тисяч особин, а коефіцієнти  $\beta$  та  $\delta$  відповідно описують частоти народження та загибелі риби.

Інтегрування (1.17) дає загальний аналітичний розв'язок у вигляді:

$$P(t) = \beta / [\delta + C \exp(-\beta t)], \quad (1.18)$$

де  $C$  – константа інтегрування, значення якої залежить від розміру популяції в початковий момент часу.

З характеру розв'язку у відповідності до (1.18), видно, що популяція риби, згідно з аналітичною моделлю (1.17), спочатку доволі швидко зростає, але з часом наближається до деякої стаціонарної та рівновагової межі (насичення, при якому подальше збільшення популяції не спостерігається).

1.2 Особливості формалізації динамічних систем та середовищ моделями у вигляді інтегральних рівнянь

**1.2.1 Застосування інтегральних моделей при формалізації задач аналізу динамічних систем та середовищ.** Випадки формулювання задач у вигляді інтегральних рівнянь, тобто рівнянь, в яких шукана функція перебуває під знаком інтегралу, вперше зустрічається, приміром, у формулах обернення Фур'є та рівняннях Абеля, отриманих при розв'язуванні задач про таутохрону [49]. Основи теорії інтегральних рівнянь було закладено в роботах Віто Вольтерри, Івара Фредгольма, Давіда Гільберта та Ерхарда Шмідта [50], [51].

У загальному випадку інтегральне рівняння має наступний вигляд:

$$\int_a^b K[x, s, u(s)] ds = f[x, u(x)], \quad a \leq x \leq b. \quad (1.19)$$

В (1.19)  $x$  являє собою незалежну змінну,  $u(x)$  – невідому функцію,  $K[x, s, u(s)]$  – ядро інтегрального рівняння, а  $s$  – змінну інтегрування.

Принагідно зазначимо, що при розв'язуванні деяких задач значно зручніше використовувати інтегральні рівняння, ніж диференціальні.

Так, наприклад [52], задача Коши

$$\frac{du(x)}{dx} = f[x, u(x)], \quad (1.20)$$

$$u(x_0) = u_0 \quad (1.21)$$

може бути сформульованою у вигляді інтегрального рівняння

$$u(x) = u_0 - \int_{x_0}^x f[s, u(s)] ds. \quad (1.22)$$

Таким чином, інтегральне рівняння (1.22), на відміну від диференціальної постановки, містить повну інформацію про задачу і для нього не потрібно додаткових умов (початкових умов, які завдаються виразом (1.21)).

Вибір інтегральних рівнянь при *математичному моделюванні*, в залежності від досліджуваного явища, обумовлено наступними факторами:

- неможливість складання інших рівнянь (суть – ММ явищ);
- необхідність зниження мірності рівнянь (тобто кількості незалежних змінних) при розв'язуванні задач для суцільних середовищ;
- можливість компактного формулювання граничних задач;
- досягнення спрощень при обчисленнях;
- можливість простого та природного переходу до систем кінцевовимірних рівнянь (при дискретизації неперервних задач).

Слід підкреслити особливу роль інтегральних рівнянь при розв'язуванні граничних задач та *аналізі випадкових* (в тому числі *динамічних*) *процесів*, що є предметом чинної дисертаційної роботи.

З'ясування деяких загальних рис (положень) методу *математичного моделювання*, який являє собою сукупність прийомів визначення математичних зв'язків між відомими вихідними даними та невідомою характеристикою об'єкта, що досліджується (або явища у вигляді інтегральних рівнянь чи перетворень), є важливим не тільки тому, що це питання недостатньо висвітлено в літературі, але також і тому, що своєрідність інтегральних співвідношень та умов їх складання у значній мірі визначають вибір *обчислювальних методів* та *засобів* при числовій реалізації.

Відомо [53]–[56], що більшість сучасних теорій, покладених в основу математичної фізики, використовує властивості локальних полів, які (властивості) полягають в тому, що значення фізичних величин поля в заданій точці останнього (або, в термінах математичної фізики – функцій стану поля) визначаються  $\varepsilon$ -околом цього поля. Тому у підґрунтя вказаних теорій покладено апарат диференційних рівнянь, що також має місце в задачах, пов'язаних із дослідженням систем, що часто називаються дискретними, в яких  $\varepsilon$ -окіл кожного моменту часу повністю визначає еволюцію системи. Застосування інтегральних рівнянь у зазначених задачах еквівалентно застосуванню диференційних рівнянь у відношенні до остаточно отриманих результатів, однак дозволяє отримати більш компактні вирази за рахунок включення в них граничних умов (ГУ), що, в свою чергу, дає можливість природно та плідно розвивати різні форми теорії збуджень [57]–[59]. Суттєвим є також можливість, яка надається інтегральними рівняннями при асимптотичному аналізі, застосовувати теореми, які зв'язують дані про середнє (інтегральне) значення функції з її локальною поведінкою.

Проблема математичного моделювання задач, які мають *стохастичну природу*, суттєво відрізняються від випадку *детермінованих задач*. Точний (повний) опис стохастичних процесів, який виконується за допомогою диференційних рівнянь, виявляється у багатьох випадках практично

малокорисним, і який не дає змогу отримати конкретні величини характеристик, що аналізуються [55], [56]. Лише пов'язаний з інтегральними співвідношеннями перехід до дослідження *усереднених характеристик* із залученням величин, що піддаються експериментальному спостереженню (і тому є *середніми*), дозволяє отримати в цих задачах конкретні результати.

Характерним об'єктом застосування інтегральних рівнянь є зовнішні задачі електродинаміки, зокрема задачі для тіл, які являють собою ідеальні провідники. Шлях складання відповідних інтегральних рівнянь полягає у наступному. Нехай векторний потенціал виражається через невідому щільність струму на поверхні тіла. Тоді поле цих струмів може бути представлено у вигляді інтегралу по границі тіла від добутку функції Гріна (для вихідних даних даної задачі) та векторного потенціалу. Додавши до інтегралу первісне поле та застосувавши ГУ, можна отримати шукане, в загальному випадку двовимірне, інтегральне рівняння відносно щільності струму на поверхні тіла. Якщо тіло являє собою довільний циліндр або тіло обертання, то отримане рівняння зводиться до одновимірного.

Описаний коротко шлях отримання інтегральних рівнянь являє собою загальний підхід, що отримав назву *метод інтегральних перетворень*, а складене рівняння, в свою чергу, є загальним для широкого кола задач. Аналіз застосувань інтегральних перетворень та рівнянь дозволяє сформулювати деякі загальні властивості такого способу математичного моделювання:

- принципова та практична можливість використання в задачах, що мають стохастичну природу, і в задачах, математичне моделювання яких засновано на оцінці сумарного впливу відомих (шуканих) величин на характеристики, що спостерігаються (досліджуються), причому вказані дані, або їх частина, має експериментальне походження.

- висока універсальність математичних співвідношень, які отримуються, що досягається як за рахунок компактного формулювання граничних задач, так і за рахунок того, що до одного і того ж типу інтегральних рівнянь зводяться задачі, кожна з яких може бути описана власним, відмінним від інших, диференціальним рівнянням.

– можливість єдинообразного переходу до розрахункових виразів з використанням ефективних прийомів обчислювальної математики.

Слід зауважити, що позитивний прояв наведених властивостей обмежено цілком певним колом прикладних задач.

**1.2.2 Приклади динамічних систем та середовищ, що описуються моделями у вигляді інтегральних рівнянь.** Достатньо значна кількість важливих проблем в науці і техніці (механіці [60]–[63], гідро–, електро– та аеродинаміці [64]–[69], квантовій механіці [70], [71], теорії пружності [72], [73] тощо), а також дослідженні природних середовищ (зокрема, задачі кліматизації, утворення та розповсюдження забруднень атмосфери і водних басейнів [74]–[76], динаміки ґрунтових рідин [77]–[79]) зводяться до інтегральних рівнянь. Інтегральна форма рівнянь руху у формі законів збереження використовується також при побудові консервативних різницевих схем для певного типу задач, наприклад, в механіці суцільного середовища [80]–[82].

*Приклад 1.4.* Розглянемо задачу аналізу напружень та пружних деформацій в досліджуваній фізичній системі (машин та механізмів, будівельних споруд, транспортних засобів тощо), що необхідно для оцінки міцності, довговічності і вібростійкості елементів останньої [83]. Такий аналіз може бути здійснено на основі наступної ММ

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (1.23)$$

де  $E$  – модуль пружності,

$K(t - \tau)$  – функція впливу напруження  $\sigma(t)$  в момент  $\tau$  на деформацію  $\varepsilon(t)$  в момент  $t$ .

*Приклад 1.5.* Розв’язок низки наукових та прикладних задач в галузі теплотехніки, аерокосмічної техніки, метеорології та геліотехніки пов’язано з

вивченням процесу променевого теплообміну в досліджуваній системі твердих тіл. Для замкнутої системи, що складається з «сірих» тіл, які мають властивість дифузійного відбиття, і які розділено прозорим середовищем, використовується ММ у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма II роду [84], [85]:

$$E_{\text{пад}}(M) - \int_F R(M) E_{\text{пад}}(N) d\varphi_{dF_M, dF_N} = \int_F A(N) E_0(N) d\varphi_{dF_M, dF_N}, \quad (1.24)$$

де  $E_{\text{пад}}(M)$  – падаюче опромінення в точці  $M$ ,

$R(M)$  – коефіцієнт відбиття,

$d\varphi_{dF_M, dF_N}$  – елементарний кутовий коефіцієнт,

$A(N)$  – коефіцієнт поглинання,

$E_0(N)$  – інтегральна щільність полусферичного опромінення абсолютно чорного тіла.

*Приклад 1.6.* В радіотехніці ММ, яка зв'язує прийнятий радіосигнал  $f(t)$  з переданим сигналом  $u(t)$ , являє собою інтеграл згортки [86]

$$\int_0^t K(t - \tau) u(\tau) d\tau = f(t), \quad (1.25)$$

де ядро  $K(t - \tau)$  визначає властивості приймальної апаратури та середовища, через яке проходить сигнал.

*Приклад 1.7.* Для реальної лінії електропередачі, яка характеризується активним опором дротів  $R_a$  та ємністним вибоком розсіювання  $C_{\text{вр}}$ , перерозподіл вхідної напруги лінії  $U_{\text{вх}}(t)$  до рівня вихідної напруги  $U_{\text{вих}}(t)$  уздовж лінії

описується ММ у вигляді наступного інтегрального рівняння

$$U_{\text{вих}}(t) = U_{\text{вих}}(0) - \frac{1}{R_a C_{\text{вр}}} \int_0^t [U_{\text{вих}}(\tau) - U_{\text{вх}}(\tau)] d\tau, \quad (1.26)$$

де  $U_{\text{вих}}(0)$  – значення вхідної напруги  $U_{\text{вх}}(t)$  у момент  $t = 0$ .

*Приклад 1.8.* Розглянемо математичну формалізацію процесу фільтрації (внутрішньо пластового дифузійного руху) високопарафіністичних нафт, який відзначається в'язкопластичною реологічною поведінкою, що надає даному процесу аномального характеру (тобто невідповідність закону Дарсі [21], [87]–[89]) з граничним значенням функцій простору стану [90]. В даному випадку фільтраційний рух даних нафт можливий лише за умови досягнення розподіленою функцією внутрішньо пластового тиску  $u(t, \mathbf{x})$  певного порогового значення  $G$  – граничного градієнту. При цьому рівність  $|\text{grad}[u(t, \mathbf{x})]| = G$  розглядається як умова граничної рівноваги [91]–[93], а фільтрація нафти забезпечується тільки при виконанні нерівності  $|\text{grad}[u(t, \mathbf{x})]| > G$ .

В процесах такого типу необхідно визначити поле внутрішньо пластового тиску  $u(t, \mathbf{x})$  нафтового пласту, в якому здійснюється фільтраційний рух нафти під дією змушуючої функції  $f(\mathbf{x})$ . Просторова область  $\Omega$  фільтраційного руху являє собою відкриту обмежену область в  $\mathfrak{R}^n$ ,  $n = 1, 2$  з границею  $\Gamma$ , а вектор  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ .

ММ даної задачі як такої, що представлено в екстремальній постановці, запишеться наступним інтегральним рівнянням:

$$\begin{aligned} & \left[ m(\mathbf{x}) \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t}, v(t, \mathbf{x}) - u(t, \mathbf{x}) \right] - k(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial [v(t, \mathbf{x}) - u(t, \mathbf{x})]}{\partial x_i} \right\} dx + \\ & + \int_{\Omega} |\text{grad}[v(t, \mathbf{x})]| dx - \int_{\Omega} |\text{grad}[u(t, \mathbf{x})]| dx - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial \eta}, [v(t, \mathbf{x}) - u(t, \mathbf{x})] \right\} d\Gamma = \end{aligned}$$

$$= [f, [v(t, \mathbf{x}) - u(t, \mathbf{x})]], \quad \forall v(t, \mathbf{x}) \in Q, \quad (1.17)$$

де  $m(\mathbf{x})$ ,  $k(\mathbf{x})$  – відповідно функції шпаруватості та проникності нафтоносного пласту;  
 $v(t, \mathbf{x})$  – пробна функція, що відповідає за смыслом функції внутрішнього пластового тиску  $u(t, \mathbf{x})$  і екстремальне значення якої є розв'язком задачі (1.17);  
 $\eta$  – нормаль до границі  $\Gamma$ ;  
 $Q$  – множина допустимих функцій, таких, що

$$Q = \left\{ v(t, \mathbf{x}) \in H^1(\Omega) \Big|_{v(t, \mathbf{x}) \geq 0} \right\},$$

а  $H^1(\Omega)$  являє собою простір функцій Соболева (порядку 1).

Особливість фізичної картини задачі (1.17), яка вимагає саме інтегральної форми її постановки, полягає в тому, що нафтоносний пласт як об'єкт характеризується «повільною» динамікою: час перехідних процесів дуже великий (тижні, місяці і, навіть, роки), а тому диференційні рівняння в даному разі – «погані» моделі (оскільки є «нечутливими» ММ в силу значного часу перехідних процесів). Натомість інтегральні рівняння дають змогу «накопичити» інформацію про процес на протязі значного відрізка часу. Крім того, ММ виду (1.17) дає змогу описати процес фільтрації як процес з «пам'яттю» та «післядією». В цьому сенсі граничний градієнт фізично відіграє роль «пам'яті», адже зберігає попередній стан скільки завгодно довго (поки діє умова  $|\text{grad}[u(t, \mathbf{x})]| \leq G$ ), хоча є зміна управління (дебіти у свердловинах у вигляді змушуючої функції  $f(\mathbf{x})$ ).

Також, при значних та тривалих у часі дебітах (управлінні) спостерігаються незначні градієнти шуканих функції пластового тиску  $u(t, \mathbf{x})$ , що, у обчислювальній реалізації задачі вимагає ґрунтовної уваги до точності числових

розв'язків. Аналіз та забезпечення необхідного рівня останніх розглядається як одна з основних задач чинної дисертаційної роботи.

Таким чином, наведені вище приклади ММ показують важливість та можливу область прикладного застосування диференціальних та інтегральних рівнянь при математичній формалізації широкого кола технічних (технологічних) та природно значимих динамічних систем та середовищ.

1.3 Математичне моделювання динамічних систем та середовищ на основі моделей, представлених диференціальними та інтегральними рівняннями

**1.3.1 Числова реалізація ММ динамічних систем в задачах моделювання та управління.** Невідомим етапом математичного моделювання є використання виразів, що описують явище, яке досліджується, для отримання числових результатів, тобто конкретних відомостей, за ради яких, у багатьох випадках, і проводиться дослідження. Цей етап має назву *числової реалізації* ММ і зводиться до розв'язування рівнянь, які відповідають прийнятій формі математичного моделювання.

Розв'язування практичних задач, сформульованих у вигляді диференціальних та інтегральних рівнянь, потребує застосування *наближених числових методів* розв'язку, для реалізації яких, як правило, необхідно застосування певних (переважно таких, що потребують застосування обчислювальної техніки) засобів обчислювання. Тому, поряд з удосконаленням теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, отримали розвиток *числові комп'ютерно-орієнтовані* методи їх розв'язування.

Задача *числової реалізації моделей* динамічних систем у вигляді диференціальних та інтегральних рівнянь, з огляду на її складність, неодмінно трансформується в проблему машинної (*комп'ютерної*) реалізації, яка, в залежності від конкретних умов та мети дослідження, може зводитися до сукупності питань вибору та використання обчислювальних методів та засобів, а у багатьох випадках – і до їх розробки. Дійсно, ММ може бути використана для

отримання лише числових результатів розв'язку – тоді це *задача обчислення*; для достатньо багатостороннього відтворення та довготривалого відтворення явища або об'єкта, що досліджується, – це *задача моделювання*; для формування управляючих впливів у іншому об'єкті чи явищі – *задача управління*. Часто метою дослідження є спільний розв'язок вказаних задач.

Основою числового розв'язування прикладних задач є досконало розроблені числові методи. Значна кількість та різноманіття цих методів пояснюється намаганням до їх удосконалення та наявністю різних типів рівнянь, неможливістю охоплення яких єдиним універсальним методом є об'єктивним фактом [18], [94]–[100].

Сказане вище дозволяє вважати, що методи математичного моделювання на основі диференціальних та інтегральних рівнянь, у сукупності з методами розв'язування (та прикладними програмами), потребують уваги як з точки зору їх розвитку, так і з точки зору застосування.

**1.3.2 Числова реалізація диференціальних рівнянь як ММ динамічних систем.** Процес розв'язування диференціального рівняння носить назву *інтегрування*. Розв'язок диференційного рівняння вважається віднайденим, якщо невідому функцію або вектор-функцію (у прийнятих позначеннях –  $y(t)$  або  $\Phi[x(t)]$ ) вдається виразити у вигляді інтегралу від комбінації елементарних функцій, що в літературі прийнято називати *приведенням до квадратури* [101]. *Загальний розв'язок* диференціального рівняння являє собою множину функцій (таких, що мають спільний характер), а *частинний розв'язок* (тобто, розв'язок конкретної задачі) отримується із загального при підстановці *початкових* (а у випадку рівнянь у частинних похідних ще додатково *граничних*) умов.

Серед методів розв'язування диференціальних рівнянь відомі *точні* (які дають *аналітичні* розв'язки) та *числові* (які дають наближені розв'язки) методи. Перші мають обмежене застосування, в основному в області гладких функцій. Другі є найбільш поширеними у прикладних задачах, де шукані функції належать

до класу кусково-неперервних або розривних функцій, а граничні умови (для випадку ММ у вигляді ДРЧП) не можуть бути задані в аналітичній формі.

При цьому застосування *числових* методів полягає у заміні шуканого точного розв'язку  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]^T$  у кожній обраній точці  $t_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  області  $\Omega$  визначення розв'язку (ОВР) *наближеним числовим значенням*  $\bar{\mathbf{y}}(t_i) = [\bar{y}_1(t_i), \bar{y}_2(t_i), \dots, \bar{y}_m(t_i)]^T$ . Тут риска над змінною позначає, що розв'язок є наближеним. Числові методи за алгоритмами реалізації розрізняються способом вибору точок дискретизації  $t_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  в ОВР  $\Omega$ ; формулою, що визначає заміну точного розв'язку на наближений, та точністю  $\delta = |\mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{y}}(t_i)|$  розв'язку (вибір останньої може впливати на час розв'язання задачі та на збіжність розв'язку).

Серед методів розв'язування ЗДР поширення набули *однокрокові* (зокрема, метод Рунге-Кутти) [102]–[104] та *багатокрокові* (наприклад, метод Адамса-Бешфорда) [105], [106] методи. Розглянемо суть даних методів.

*Метод Рунге-Кутти четвертого порядку.* Для конкретності викладення представимо розв'язок диференціального рівняння виду

$$y'(t) = f[x(t), y(t)], \quad y_0 = y[x(0)] = 0. \quad (1.28)$$

Виконаємо наближену заміну значення шуканої функції  $y(t_{n+1}) = y_{n+1}$  та заданої функції  $x(t_{n+1}) = x_{n+1}$  правої частини в (1.28) у обраній точці  $t_{n+1}$ , значеннями вказаних функцій, які отримано у попередній точці  $t_n$  (у подальшому, для спрощення запису, опустимо незалежний параметр часу  $t$ ), тобто значеннями  $y_n$  та  $x_n$ , відповідно. Така заміна еквівалентна різниці на величину кроку інтегрування  $h = t_{n+1} - t_n$ . Далі виконується оцінка у вигляді чотирьох похідних функції  $f_n(y_n, x_n)$ :

$$k_1 = hf_n; \quad k_2 = hf_n(x_n + h/2, y_n + k_1/2); \quad k_3 = hf_n(x_n + h/2, y_n + k_2/2);$$

$$k_4 = hf_n(x_n + h/2, y_n + k_3); \quad y_{n+1} = y_n + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Зазначений алгоритм обчислень повинен бути повторений у кожній точці  $t_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  області  $\Omega$  визначення розв'язку (ОВР).

*Метод Адамса-Бешфорда.* Для диференціального рівняння, яке розв'язується (наприклад, виду (1.28)), використовується наближена заміна значення шуканої функції  $y_{n+1}$  в точці  $t_{n+1}$  з урахуванням значення функції  $x_{n+1}$  проміжними змінними  $p_{n+1}$ ;  $m_{n+1}$ ;  $c_{n+1}$ , які залежать від значень шуканої функцій  $y_{n+1}$  і  $y_n$  та її похідних:  $y'_n$ ;  $y'_{n-1}$ ;  $y'_{n-2}$ ;  $y'_{n-3}$ . З урахуванням зроблених зауважень, алгоритм обчислень значення шуканої функції  $y_{n+1}$  має наступний вигляд:

$$p_{n+1} = y_n + h/24(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3});$$

$$m_{n+1} = p_{n+1} - 251/270(p_n - c_n);$$

$$c_{n+1} = y_{n-1} + h/24[(9x_{n+1} - m_{n+1}) + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}];$$

$$y_{n+1} = c_{n+1} + 19/270(p_{n+1} - c_{n+1}).$$

Наведений алгоритм обчислень повторюється (тому алгоритм багатокроковий) до досягнення заданої точності  $\delta$  для кожної точки  $t_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  в ОВР  $\Omega$ .

Для розв'язування ДРЧП застосовують метод *кінцевих різниць* та метод *кінцевих елементів* [94], [96], [97]. Суть обох методів полягає у *апроксимації* (наближені) геометричної області  $\Omega$  (у більшості прикладних задач – плоскої), де розвивається динамічний процес, *пласкою сіткою* (рівномірною або нерівномірною – у методі кінцевих різниць) чи кінцевою кількістю *пласких примітивів*, зокрема, трикутних (тобто кінцевих елементів у відповідному

методі). Така апроксимація зумовлена тим, що об'єкти з розподіленими параметрами, які описуються ДРЧП, не можуть бути представленими у кінцево-вимірному просторі. Далі, для кожного з вузлів сітки дискретизації (в методі кінцевих різниць) чи кінцевого елемента (метод кінцевих елементів) розв'язується дискретна задача з урахуванням значень шуканої функції в сусідніх вузлах сітки дискретизації або кінцевих елементах, відповідно. Зважаючи на більшу поширеність методу кінцевих різниць, розглянемо його більш докладно.

*Метод кінцевих різниць.* В основу методу кінцевих різниць покладено застосування так званих *різницевої схем*. Шукана функція (розв'язок ДРЧП) замінюється певною числовою множиною окремих її значень, яка (множина) є результатом розв'язку системи алгебраїчних рівнянь, складених для всіх вузлових точок сітки дискретизації. При цьому алгебраїчні рівняння у вузлових точках утворюються шляхом наближеної заміни диференціального оператора у вихідному виразі так званими *кінцевими різницями* (звідси і назва методу), що являють собою *прироцнення* шуканої функції між сусідніми вузлами. Кількість алгебраїчних рівнянь в системі дорівнює числу вузлових точок, яке, в свою чергу визначається кроками дискретизації сітки  $\Delta x_1$  та  $\Delta x_2$  по відповідних координатах просторової області  $\Omega$ . Точність розв'язку ДРЧП залежить від обраних кроків дискретизації: при їх зменшенні точність зростає, але, відповідно, зростає час обчислень та обчислювальні витрати на пошук розв'язку. Отримана система алгебраїчних рівнянь розв'язується тим або іншим методом, зокрема, стрічковим виключенням Гауса [97].

Вирази для кінцевих різниць, наприклад, для частинних похідних другого порядку для функції  $f[u(t, x_1, x_2), y(t, x_1, x_2)]$  в точці  $M[u(0, x_1, x_2), y(0, x_1, x_2)] = M(u_0, y_0)$  мають вигляд:

$$\frac{\partial^2 f(u_0, y_0)}{\partial u^2} \approx \frac{f(u_0 + \Delta u_{x_1}, y_0) - 2f(u_0, y_0) + f(u_0 - \Delta u_{x_1}, y_0)}{(\Delta u_{x_1})^2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f(u_0 + \Delta u_{x_2}, y_0) - 2f(u_0, y_0) + f(u_0 - \Delta u_{x_2}, y_0)}{(\Delta u_{x_2})^2}; \\
\frac{\partial^2 f(u_0, y_0)}{\partial u^2} & \approx \frac{f(u_0, y_0 + \Delta y_{x_1}) - 2f(u_0, y_0) + f(u_0, y_0 - \Delta y_{x_1})}{(\Delta y_{x_1})^2} + \\
& + \frac{f(u_0, y_0 + \Delta y_{x_2}) - 2f(u_0, y_0) + f(u_0, y_0 - \Delta y_{x_2})}{(\Delta y_{x_2})^2}.
\end{aligned}$$

Обов'язковим етапом пошуку розв'язку є визначення поточної *похибки*  $\delta_j$  на кожному кроці  $j$ ,  $j = \overline{1, K}$  обчислювального процесу як:

$$\delta_j \leq |f_{j+1} - f_j|.$$

Якщо даний вираз виконується і задана точність досягнута, то обчислювальний процес завершується, а шукану функцію – віднайдено. У іншому випадку обчислювальний процес продовжується (*ітераційно*) до досягнення заданої точності.

**1.3.3 Розв'язування рівнянь Вольтерри в задачах аналізу (моделювання і ідентифікації) динамічних об'єктів та пошуку управління ними.** Значна кількість задач дотичних вимірів, дослідження та спостереження малодоступних об'єктів (явищ) у термінах теорії управління слід віднести до *зворотних*. При цьому, для визначення шуканої характеристики, яку представлено елементом (функцією, вектором) в певній множині  $Y$ , наявними є лише перетворені дані

$$Ay = f, \tag{1.29}$$

які представлено елементом  $f$  ( $f \in AY$ ), що вимірюється (спостерігається), і який є результатом дії оператора  $A$ . Таким чином, шуканий *параметр (характеристика)* являє собою розв'язок рівняння (1.29), і цей розв'язок належить лише тим елементам, які належать  $AY$ . Подібні задачі відносяться до класу *некоректних задач* [107]. Оператор  $A$  у багатьох випадках відноситься до одного з видів інтегральних операторів.

Нижче розглянемо певні особливості та методи розв'язування рівняння (1.29) у застосуванні до класу динамічних об'єктів, за умови, що оператор  $A$  є інтегральним оператором Вольтерри. Іншими словами, рівняння (1.29) являє собою *рівняння Вольтерри першого роду* [50], [51], [108]–[111].

В загальному випадку це рівняння має вигляд

$$A_{\text{вн}} [y(t)] \equiv \int_{t_0}^t K[t, s, y(s)] ds = f(t), \quad (1.30)$$

де  $A_{\text{вн}} [\cdot]$  – нелінійний інтегральний оператор Вольтерри;  
 $K[t, s, y(s)]$  – задана функція своїх змінних (ядро);  
 $y(s)$  – шукана функція (вхідний сигнал вимірювальної системи);  
 $f(t)$  – відома функція (сигнал на виході, який спостерігається).

Властивості вимірювальної апаратури визначаються ядром, вид якого в рівнянні (1.30) свідчить про нелінійність вимірювального тракту. Для лінійного об'єкта або апаратури з лінійним нестационарним трактом вимірювання, що описується лінійним оператором Вольтерри  $A_{\text{вл}} [\cdot]$ , має місце рівняння

$$A_{\text{вл}} [y(t)] \equiv \int_{t_0}^t K(t, s) y(s) ds = f(t), \quad t \in (t_0, T) \quad (1.31)$$

де ядро  $K(t, s)$  являє собою вагову функцію.

Якщо  $K(t_0, t_0) \neq 0$ ,  $f(t_0) = 0$  та функції  $K(t, s)$ ,  $f(t)$  мають похідні  $K'_t(t, s)$ ,  $f'(t)$ , безперервні в інтервалі інтегрування  $(t_0, T)$ , в середині якого  $K(t, t)$  не набуває нульового значення, то рівняння (1.11) допускає в цьому інтервалі безперервний та єдиний розв'язок. Вказані умови необхідно враховувати при використанні будь-якого з методів розв'язування рівняння (1.31) [51].

Для визначення резольвенти, яка дозволяє представити розв'язок рівняння (1.31) в аналітичному вигляді, зазвичай шляхом диференціювання, можна перейти до еквівалентного рівняння Вольтерри *другого роду*

$$y(t) + \int_{t_0}^t [K'_t(t, s)/K(t, t)]y(s)ds = [f'(t)/K(t, t)], \quad (1.32)$$

отримання якого неможливо без виконання визначених вище умов. Перехід від (1.31) до (1.32) є різновидом *регуляризації*. Для розв'язування рівняння (1.32) можна скористатися достатньо великою кількістю методів при незначних обмеженнях [112], [113]. Якщо в рівнянні (1.32)  $K(t_0, t_0) = 0$ , то воно залишається рівнянням першого роду. Однак, аналогічні спроби отримання рівняння другого роду можуть бути продовжені, якщо по деякому  $p$ -кратному диференціюванні  $K_t^{(p-1)}(t_0, t_0) \neq 0$ , тоді отримуємо

$$y(t) + \int_{t_0}^t \left[ \frac{1}{K^{(p-1)}(t, t)} \frac{\partial^p K(t, s)}{\partial t^p} y(s) \right] ds = f^{(p)}(t). \quad (1.33)$$

По ядру рівняння другого роду відомими методами [114]–[116] може бути віднайдено резольвенту. Наприклад, маючи резольвенту  $R_p(t, s)$  ядра рівняння

(1.33), розв'язок можна записати у вигляді

$$y(t) = \frac{1}{K^{(p-1)}(t, t)} f^{(p)}(t) + \int_{t_0}^t [R_p(t, s) f^{(p)}(s)] ds. \quad (1.34)$$

Для розв'язування рівняння (1.31) може бути застосовано *наближені числові методи*. Зокрема, якщо вдається апроксимувати ядро  $K(t, s)$  ядром, яке розділяється [117]–[119], то (1.31) може бути приведено до системи звичайних диференціальних рівнянь [120], [121].

Найбільш загальним числовим методом, який можна застосувати до інтегральних рівнянь, є *метод квадратурних формул*, використання якого до рівняння (1.31) виглядає наступним чином. Відрізок  $[0, T]$  розбивається на  $n$  частин та обираються вузли дискретизації  $t = t_i$   $i = \overline{0, n-1}$ .

Тоді замість (1.31) можна записати:

$$\int_{t_0}^{t_i} [K(t_i, s) y(s)] ds = f(t_i). \quad (1.35)$$

Після заміни в (1.35) інтеграла будь-якою квадратурною формою, можна отримати систему

$$\sum_{j=1}^i (A_j K_{ij} y_j) = f_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (1.36)$$

де  $A_j$  – коефіцієнти квадратурної формули;

$$K_{ij} = K(t_i, t_j), \quad j = \overline{0, i};$$

$$f_i = f(t_i);$$

$$y_i = y(t_i) – \text{наближені значення шуканої функції у вузлах } t_i, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Особливість системи (1.36) полягає у неможливості визначення значення  $y_0$ , яке, будучи віднайденим, дозволяє потому отримати значення  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  рекурентно. Це пояснюється тим, що інтеграл в (1.31) при  $t = t_0$  дорівнює нулю і  $f(t_0) = f_0 = 0$ . Вихід полягає в тому, щоб визначити  $y_0$  з рівняння (1.32) звідки при  $t = t_0$

$$y_0 = [f'(t)/K(t, t)] = [f'(0)/K_{0,0}] . \quad (1.37)$$

Тоді система (1.36) дозволяє послідовно визначити значення

$$y_i = \frac{1}{A_i K_{i,i}} \left[ f_i - \sum_{j=1}^{i-1} (A_j K_{ij} y_j) \right], \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (1.38)$$

при  $A_i K_{i,i} \neq 0$ .

Використання формули трапецій дозволяє отримувати наступні співвідношення. Якщо прийняти крок  $h_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  змінним та покласти

$$t_1 = t_0 + h_1, \quad t_2 = t_1 + h_2, \quad \dots, \quad t_n = T,$$

то

$$y_1 = \frac{1}{K_{1,1}} \left[ \frac{f_1}{h_1} - \frac{1}{2} K_{1,0} y_0 \right], \quad \dots,$$

$$y_i = \frac{2}{K_{i,i}} \left[ \frac{f_i}{h_i} - \frac{h_1}{2h_0} K_{i,0} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{h_j + h_{j-1}}{h_i} K_{ij} y_j \right) \right], \quad (1.39)$$

а значення  $y_0$  визначаються з (1.37).

При постійному кроці  $h_1 = h_2 = \dots = h_i = h$  замість (1.19) має місце формула

$$y_i = \frac{1}{K_{i,i}} \left[ \frac{f_i}{h} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} (A_j K_{ij} y_j) \right], \quad (1.40)$$

$$t_i = t_0 + (i+1)h, \quad A_j = \begin{cases} 0,5 & \text{при } j = 0; \\ 1 & \text{при } j > 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

При обчисленні значення

$$f'(t_0) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=t_0}$$

можна скористатися різними інтерполяційними методами, в тому числі формулою *квадратичної інтерполяції*

$$f'(t_0) \approx \frac{1}{2h} [-3f(t_0) + 4f(t_0 + h) - f(t_0 + 2h)]. \quad (1.41)$$

Розв'язування рівняння (1.31) за виразами (1.40), (1.41) дозволяє розв'язати задачу відновлення форми вхідного сигналу певного динамічного (лінійного) об'єкта по відомій ваговій функції та вихідному сигналу, представлених в аналітичному вигляді або у вигляді експериментально отриманих даних із значеннями, представленими в деяких вузлах, що рівно відстоять один від одного. При цьому вихідний сигнал може мати довільну форму та бути записаним на кінцевому проміжку, якому відповідає інтервал  $[0, T]$ . Для успішного застосування квадратурних формул необхідно, щоб інтервал між вимірюваннями був досить малим, а форма сигналу дозволяла обчислювати значення її похідної у початковому вузлі  $t_0$  по формулі (1.41).

**1.3.4 Метод модельних прикладів щодо розв'язування рівнянь Фредгольма першого роду.** Як зазначалося вище, постановка задачі відшукування невідомої характеристики у вигляді (1.19) є некоректною. Не зважаючи на те, що у розвитку теорії наближених методів розв'язування некоректних задач отримано значні конструктивні результати [122]–[124], проблема ефективної та формалізованої реалізації методів регуляризації і до тепер залишається ще гострою [94], [125]. Одним з розповсюджених методів при визначенні параметру регуляризації є *метод модельних прикладів*, суть якого викладено, зокрема в [126, 127]. Обґрунтування (з використанням оціночних нерівностей) та процедура методу модельних прикладів полягає в наступному.

Нехай завдано операторне рівняння першого роду, що відповідає (1.19):

$$Ay = f, \quad y \in Y, \quad f \in F, \quad (1.42)$$

де  $y$  – шуканий, а  $f$  – заданий елементи лінійних нормованих просторів  $Y$  та  $F$ ;  $A$  – лінійний безперервний оператор  $A: Y \rightarrow F$ .

Відомо [107], [122], [123] (як зазначалося вище), що задача розв'язування рівняння (1.42) є некоректною і повинна розв'язуватися певними методами, які набули назву *методів регуляризації* [112].

Так, в *методі регуляризації Лаврентьєва* [128], [129], замість рівняння (1.42) розв'язується рівняння

$$\alpha y + Ay = f, \quad (1.43)$$

де  $\alpha$  – параметр регуляризації, а в *методі Тихонова* [130], замість (1.42) розв'язується рівняння

$$\alpha y + A^* Ay = A^* f,$$

де  $A^*$  – оператор, сполучений з оператором  $A$ .

Найбільш трудомісткою та складною є задача визначення параметру  $\alpha$ , для розв'язування якої запропоновано декілька методів, у тому числі *метод модельних прикладів* [127].

*Визначення 1.1.* Модельним прикладом (рівнянням) по відношенню до деякої практичної задачі (рівнянню)  $P$  називається приклад  $Q$ , який має такий самий набір параметрів  $M = (m_1, m_2, \dots, m_k)$ , що і задача  $P$ .

Якщо задачу  $P$  та приклад  $Q$  розв'язувати при одному й тому ж значенні параметра  $\alpha$ , то цілком раціонально вважати, що оцінки відносних похибок розв'язків в обох випадках будуть однаковими. Це дає можливість вважати рівняння  $P$  та  $Q$ , в певному сенсі «близькими», не зважаючи на можливе розходження в правих частинах. Природно, співпадіння оцінок не гарантує рівності відносних похибок  $\|\Delta y_P\|/\|y_P\|$  та  $\|\Delta y_Q\|/\|y_Q\|$  відповідних розв'язків (похибки рівні лише у випадку, коли  $f_Q(x) = g f_P(x)$ , де  $g = \text{const} \neq 0$  [127]).

Смисл уведення модельного прикладу полягає у можливості мати «близьке» до рівняння, яке розв'язується, інше – з відомим розв'язком  $y_Q$ .

Метод модельних прикладів полягає у наступному [127].

1) Для заданого рівняння  $P$ , яке підлягає розв'язуванню, складається штучний модельний приклад  $Q$ , в якому задається *точний розв'язок*  $y_Q(s)$  такий, щоб функція  $f_Q(x)$ , яку визначається обчисленням інтегралу в лівій частині рівняння (рівняння Фредгольма першого порядку)

$$Ay = \int_a^b [K(x, s)y(s)] ds = f(x), \quad c \leq x \leq d, \quad (1.44)$$

де ядро  $K(x, s) \in L_K$  та права частина  $f(x) \in L_f$  – відомі функції,

$y(s) \in Y$  – шукана функція, був би (тобто точний розв'язок  $y_Q(s)$ ), за можливістю, «близьким» до правої частини  $f_P(x)$  рівняння  $P$ , яке

розв'язується (наприклад, з точністю до деякого постійного множника  $g = \text{const} \neq 0$ ).

При цьому, будуючи функцію  $y_Q(s)$ , необхідно враховувати можливу апіорну інформацію щодо шуканої функції  $y_P(s)$ .

2) До значень  $f_Q(x)$ , за допомогою генератора випадкових чисел, додаються такі похибки, при яких приблизно співпадають величини  $\|\Delta f_Q\|/\|f_Q\|$  та  $\|\Delta f_P\|/\|f_P\|$  (вочевидь, точної рівності не можна досягнути, оскільки  $\Delta f_P$  на практиці зазвичай відома з похибкою).

3) Шляхом числового розв'язування модельного прикладу  $Q$ , відповідно до одного з методів регуляризації (1.43), (1.44), для ряду значень  $\alpha$  визначається оптимальне значення  $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$  таке, при якому

$$\|y_{Q_\alpha} - y_Q\| \rightarrow \min. \quad (1.45)$$

Тут  $y_{Q_\alpha}$  – числовий розв'язок рівнянь регуляризації (1.16), відповідно за методами Лаврентьєва та Тихонова:

$$\alpha y \left[ (x-c) \frac{b-a}{\alpha-c} + \alpha \right] + \int_a^b [K(x,s)y(s)] ds = f(x); \quad c \leq x \leq d, \quad (1.46)$$

$$\alpha y(x) + \int_a^b [K(x,s)y(s)] ds = \omega(x); \quad a \leq x \leq b, \quad (1.47)$$

де

$$K(x,s) = \int_c^d [K(t,x)K(t,s)] dt, \quad \omega(x) = \int_c^d [K(t,x)f(t)] dt.$$

4) Віднайдене значення  $\alpha_{Q_{\text{опт}}}$ , будучи близьким до шуканого  $\alpha_{P_{\text{опт}}}$ , використовується у подальшому для розв'язування вихідного рівняння  $P$ .

Строге математичне обґрунтування методу модельних прикладів ускладнено. Однак, в прикладному сенсі, метод еталонних прикладів може бути орієнтовано для оперативного розв'язування некоректних задач (особливо *задач управління в реальному масштабі часу*) з однаковими наборами вихідних даних  $M = (m_1, m_2, \dots, m_k)$ . При цьому розв'язування широкого кола практичних задач свідчить про ефективність даного методу [127]. Крім розглянутих, певного поширення при числовій реалізації інтегральних рівнянь, набули методи: резольвент [116], [131], зведення до алгебраїчних рівнянь [94], заміни інтеграла кінцевою сумою [51], [94], [132].

При реалізації ММ динамічних систем у вигляді інтегральних рівнянь важливим аспектом постають питання сталості та точності отриманих моделей, що потребує додаткового аналізу, який проведено нижче. Також, окремі питання щодо аналізу точності реалізації ММ динамічних систем у вигляді диференціальних рівнянь, розглянуто у другому розділі.

1.4 Сталість математичних моделей динамічних систем, що апроксимуються інтегральними рівняннями

Розглянемо питання щодо *сталості* ММ, які реалізують методи математичного моделювання, і які (моделі) дозволяють виконувати моделювання в реальному (або, навіть, прискореному) масштабі часу, що набуває особливе значення в *задачах управління*.

Оберемо для подальшого розгляду *рівняння Вольтери другого роду*:

$$y(x) + \lambda \int_0^x [K(x, s)y(s)] ds = f(x), \quad (1.48)$$

де  $y(x)$  – шукана функція;  $K(x, s)$ ;

$f(x)$  – ядро та права частина, відповідно;

$\lambda > 0$  – параметр.

Замінімо в (1.48) інтеграл кінцевою сумою, в наслідок чого отримаємо апроксимуючу алгебраїчну суму

$$\tilde{y}(x_j) + \lambda \sum_{j=1}^n [h_j K(x_i, x_j) \tilde{y}(x_j)] = f(x_i); \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.49)$$

де  $h_j$  – коефіцієнти, що визначаються квадратурною формулою.

Уводячи позначення:

$$\lambda h_j K(x_i, x_j) = a_{ij}; \quad \tilde{y}(x_i) = y_i; \quad f(x_i) = f_i, \quad (1.50)$$

отримуємо лінійну систему

$$y_i + \sum_{j=1}^i a_{ij} y_j = f_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.51)$$

з трикутною матрицею коефіцієнтів.

Якщо виконується умова

$$1 + a_{ij} \neq 0, \quad (1.52)$$

то система (1.51) дозволяє послідовно визначити всі невідомі:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1 (1 + a_{11})^{-1}; \\ y_2 &= (f_2 - a_{21} y_1) (1 + a_{22})^{-1}; \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

$$y_n = \left( f_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} y_j \right) (1 + a_{nn})^{-1}. \quad (1.53)$$

Виходячи з алгебраїчного критерію сталості Гурвиця [133]–[139], умовою сталості для апроксимованої ММ (1.49), з урахуванням уведених позначень (1.50), буде

$$\lambda h_i |K(x_i, x_j)| < a_{ij}; \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.54)$$

або, для нормованих значень  $(a_{ij} / a_{\max}) \leq 1$

$$\lambda h_i |K(x_i, x_j)| < 1; \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.55)$$

Якщо умови (1.52) та (1.55) виконуються, допустимо застосування ММ без її перетворення. В іншому випадку, необхідно добитись виконання даних умов шляхом еквівалентних перетворень апроксимованої ММ виду (1.49), що завжди можливо для систем з трикутними матрицями коефіцієнтів (у випадку системи (1.49) – матрицею коефіцієнтів  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  ).

Дискретна апроксимація рівняння Вольтерри першого роду

$$\lambda \int_0^x [K(x, s) y(s)] ds = f(x) \quad (1.56)$$

з урахуванням уведених позначок (1.50) набуває вигляду

$$\sum_{j=1}^i a_{nj} y_j = f_i. \quad (1.57)$$

Переходячи до еквівалентної системи

$$y_i + \sum_{j=1}^i a_{ij}^* y_j = f_i, \quad (1.58)$$

де

$$a_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij} & \text{при } i \neq j; \\ a_{ij}^{-1} & \text{при } i = j, \end{cases} \quad (1.59)$$

і яка в матричному запису являє собою рівняння Вольтерри другого роду, отримуємо можливість записати умову сталості

$$g_{ii} = |a_{ii} - 1| - 1 \quad \text{звідки } 0 < \lambda_i K(x_i, x_i) < 2. \quad (1.60)$$

Умову

$$1 = a_{ii}^* \neq 0 \quad \text{тобто } a_{ii} \neq 0$$

аналогічну (1.52), можна прийти до висновку, що найбільш сприятливою ситуацією для застосування безпосереднього моделювання еквівалентної алгебраїчної системи при розв'язуванні рівнянь Вольтерри першого роду є випадок, коли ядро не обертається у нуль на інтервалі інтегрування.

Система алгебраїчних рівнянь, отримана в результаті дискретної апроксимації рівнянь Фредгольма другого роду

$$y(x) + \int_a^b [K(x, s) y(s)] ds = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (1.61)$$

з використанням позначень (1.42) має вигляд:

$$y_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = f_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.62)$$

Для моделювання системи (1.62) можна скористатися аналоговою моделлю (так званою  $\alpha$ -моделлю [132], [140]–[143]) параметри якої дорівнюють

$$g_{ij} = |a_{ij}| = |\lambda h_j K(x_i, x_j)|; \quad i, j = \overline{1, n},$$

а знаки коефіцієнтів задаються на етапі формування відповідної матриці  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ .

З'ясуємо умови, яким повинно задовольняти вихідне рівняння, щоб дана ММ була сталою без перетворень системи (1.62). Відомий ряд достатніх ознак сталості [144]–[147], заснованих на відповідних локалізаційних теоремах. Розповсюдженою на практиці є умова, яка, у застосуванні до системи (1.62), має вигляд (при  $\lambda K(x, x) > 0$ ):

$$2(1 + a_{ii}) > 1 + \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n},$$

Звідки

$$1 + 2h_i \lambda K(x_i, x_i) > |\lambda| \sum_{j=1}^n [h_j |K(x_i, x_j)|]. \quad (1.63)$$

Переходячи у виразі (1.63) від суми до інтегралів, і враховуючи малість

коефіцієнта  $h_i$ , отримаємо умову, яка відноситься до вихідного рівняння

$$|\lambda| \int_a^b |K(x, s)| ds < 1, \quad (1.64)$$

звідки при  $\max_{x,s} |K(x, s)| < D$  маємо

$$|\lambda| < \frac{1}{D(b-a)}. \quad (1.65)$$

Таким чином, при виконанні (1.65) та достатньо «малій» похибці апроксимації рівняння Фредгольма другого роду (1.61) системою (1.62)  $\alpha$ -модель буде *сталою*. Отримана умова сталості співпала з умовою збіжності методу простої ітерації [18], [97], [148]–[152], який застосовується до лінійного рівняння Фредгольма другого порядку.

Подібна співпадіння умов сталості  $\alpha$ -моделі та умов збіжності процесу розв'язування методом простої ітерації відповідної системи рівнянь (в даному випадку виду (1.62)) підтверджує якісну аналогію між інтегральними рівняннями та системами відповідних алгебраїчних рівнянь.

Дискретна апроксимація рівнянь *Фредгольма першого роду*

$$\lambda \int [K(x, s) y(s)] ds = f(x) \quad (1.66)$$

приводить до системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = f_i; \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (1.67)$$

Виконуючи перетворення (1.47) до вигляду

$$y_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}^* y_j = f_i; \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (1.68)$$

де  $a_{ij}^*$  визначаються виразом (1.59), можна отримати можливість принципіального використання розв'язуючої схеми, параметри якої повинні відповідати співвідношенням:

$$g_{ij} = |a_{ij}| \quad (i \neq j); \quad g_{ii} = |a_{ii} - 1|.$$

Некоректність рівнянь Фредгольма першого роду (1.66) обумовлено тим, що наявний в них інтегральний оператор не є таким, що нормально розв'язується [153]–[156], тобто область його значень не є замкнутою множиною. У зв'язку з цим умова розв'язуваності рівнянь першого роду принципово відрізняється від умов розв'язуваності рівнянь другого роду, що має прояв у суттєвій залежності розв'язку від похибки обчислення.

При заміні інтегрального рівняння алгебраїчною системою неперервний спектр власних значень, які «згущуються» до нуля, замінюється дискретним, і при цьому можливий зсув у бік від нуля. В останньому випадку має місце «природна» регуляризація задачі, яка розв'язується. Однак отримана система, за звичай, є погано обумовленою і, таким чином, якщо вона навіть принципово допускає застосування  $\alpha$ -моделі, то через наявність похибок уведення коефіцієнтів системи в модель, остання може виявитися *несталою*. В таких випадках для забезпечення сталості ММ та покращення точності розв'язку необхідно проводити регуляризацію [157]–[159].

Порівнюючи методи регуляризації [157] та [158], [159], які отримали найбільше поширення, можна зробити наступний висновок. У випадку «гладких» функцій  $f(x)$ , а також функцій з «поміrkованими» флуктуаціями перевагу слід

надавати методу [158], оскільки він потребує менше витрат на обчислення, але дає приблизно ті ж самі результати, що і метод [159]. У випадку ж суттєвих флуктуацій необхідно користуватися методом [127], який дає більш точний результат.

1.5 Загальні питання постановки задачі числового аналізу та дослідження похибок математичного моделювання динамічних систем

**1.5.1 Постановка задачі числового аналізу та загальна характеристика похибок числових розв'язків при математичному моделюванні динамічних систем.** Числові методи розв'язування, зокрема, диференціальних та інтегральних рівнянь (або – *числові методи аналізу*) в задачах моделювання динамічних систем (та управління ними) необхідні у випадках, коли *точні* розв'язки поставлених задач або неможливо отримати (наприклад, якщо граничні умови не є аналітичними функціями; задані функції є розривними; відсутні умови збіжності розв'язку), або його використання ускладнено (наприклад, через наявність обмежень на шукані чи управляючі функції).

Нехай  $X$  – умова задачі;  $Y$  – її розв'язок;  $F$  – *відображення*, яке ставить відповідність між умовою задачі та її розв'язком (іншими словами – *метод розв'язування задачі*). Тоді можна записати що:

$$F: X \rightarrow Y \text{ або } Y = FX. \quad (1.69)$$

Позначимо через поняття з тильдами:  $\tilde{Y}$  – *наближений розв'язок (образ)*;  $\tilde{X}$  – *наближену умову задачі*. Тоді, очевидно, можна записати:

$$\tilde{F}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y} \text{ або } \tilde{Y} = \tilde{F}\tilde{X}. \quad (1.70)$$

Процедура відшукування певного відображення  $F$ , яке встановлює відповідність між (1.69) і (1.70) та засобами отримання даного  $F$  спільно з прийомами, які зводять задачу до числових алгоритмів послідовного виконання операцій, що виконуються цифровими машинами (комп'ютерами), і складає основу *обчислювальних методів*.

Оскільки числові методи являють собою наближені методи розв'язування задач аналізу, при розв'язуванні останніх необхідно враховувати наступні похибки розв'язку:

- $\delta_a$  – *алгоритмічні похибки* – похибки опису моделей задачі;
- $\delta_t$  – *трансформовані похибки* – похибки, які накопичуються в ході процесу розв'язування задачі, та які обумовлюються похибками вихідних даних;
- $\delta_o$  – *обчислювальні похибки*, які обумовлюються похибками виконання арифметичних дій.

Нехай шукана величина (розв'язок)  $Y$  є функцією параметрів  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ; тобто  $Y = Y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Відома також область  $G$  в просторі  $\mathfrak{R}^n$  параметрів  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , якій належать ці параметри:  $[\alpha_n] \in G \in \mathfrak{R}^n$ . Покажемо, як отримати наближення  $\tilde{Y}$  до  $Y$  та оцінити похибку цього наближення.

*Граничною абсолютною похибкою*  $A(\tilde{Y})$  будемо вважати найкращу за наявної інформації оцінку похибки величини  $\tilde{Y}$ :

$$A(\tilde{Y}) = \sup_{\alpha \in G} |Y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)| \quad (1.71)$$

Визначимо *граничну відносну похибку*  $\delta(\tilde{Y})$  наступним чином:

$$\delta(\tilde{Y}) = \frac{A(\tilde{Y})}{|\tilde{Y}|}.$$

Тоді, очевидно, можна записати формули похибок для частинного випадку функції двох змінних:

$$\begin{aligned}
 Y &= Y(A_1, A_2); \\
 A_1 &= \alpha_1 + \Delta\alpha_1; \quad A_2 = \alpha_2 + \Delta\alpha_2, \\
 |\Delta(\tilde{Y})| &= |Y(\alpha_1 + \Delta\alpha_1, \alpha_2 + \Delta\alpha_2) - Y(\alpha_1, \alpha_2)|. \\
 |\Delta(\tilde{Y})| \approx d\tilde{Y} &= \left( \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \alpha_1} \Delta\alpha_1 + \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \alpha_2} \Delta\alpha_2 \right) \leq \left( \left| \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \alpha_1} \right| |\Delta\alpha_1| + \left| \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \alpha_2} \right| |\Delta\alpha_2| \right) \\
 |\Delta\alpha_1| &\leq \Delta(\alpha_1); \quad |\Delta\alpha_2| \leq \Delta(\alpha_2); \\
 |\Delta(\tilde{Y})| &\leq \left[ \left| \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \alpha_1} \right| \Delta(\alpha_1) + \left| \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \alpha_2} \right| \Delta(\alpha_2) \right]. \tag{1.72}
 \end{aligned}$$

$$\delta(\tilde{Y}) = \frac{\Delta\tilde{Y}}{\tilde{Y}} \leq \left\{ \left| \frac{\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \alpha_1}}{\tilde{Y}} \right| \Delta(\alpha_1) + \left| \frac{\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \alpha_2}}{\tilde{Y}} \right| \Delta(\alpha_2) \right\} = \left\{ \left| \frac{\partial \ln(\tilde{Y})}{\partial \alpha_1} \right| \Delta(\alpha_1) + \left| \frac{\partial \ln(\tilde{Y})}{\partial \alpha_2} \right| \Delta(\alpha_2) \right\}. \tag{1.73}$$

У загальному випадку:

$$\Delta(\tilde{Y}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \alpha_i} \Delta(\alpha_i) \right\}. \tag{1.74}$$

$$\delta(\tilde{Y}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left| \frac{\partial \ln(\tilde{Y})}{\partial \alpha_i} \right| \Delta(\alpha_i) \right\}. \tag{1.75}$$

Похибки, як правило, невідомі і для їх оцінки необхідні *числові критерії* [160]. Такими критеріями можуть слугувати наступні.

*Речовинний лінійний простір.* Сукупність елементів  $\{u\}=U$  утворюють *речовинний лінійний простір*, якщо для будь-яких елементів  $u \in U$  уведено поняття:

– суми з властивостями

$$u_1 + u_2 = u_2 + u_1;$$

$$u_1 + 0 = u_1;$$

$$u_1 + (-u_1) = 0;$$

– добутку на будь-яке речовинне число  $\alpha$  з властивостями

$$\alpha(u_1 + u_2) = \alpha u_1 + \alpha u_2;$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2)u = \alpha_1 u + \alpha_2 u;$$

$$\alpha_1(\alpha_2 u) = (\alpha_1 \alpha_2)u.$$

*Метрика.* Речовинний лінійний простір є *метричним*, якщо в ньому уведено певним чином поняття відстані між його елементами – *метрика*. Метрика визначається як невід’ємна величина  $\rho(u, v)$  простору  $U$ , якщо для будь-яких  $u, v \in U$  виконується:

$$\rho(u, v) = \rho(v, u) \text{ для } u \neq v;$$

$$\rho(u, u) = 0;$$

$$\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v); \quad u < w < v. \quad (1.76)$$

*Норма.* Речовинний лінійний простір є *нормованим*, якщо кожному елементу  $u \in U$  поставлено у відповідність невід'ємне число  $\|u\|$ , яке називається *нормою*, та яке задовольняє умовам:

$$\begin{aligned}\|u\| &\geq 0; \\ \|\alpha u\| &= |\alpha| \cdot \|u\|; \\ \|u + v\| &\leq \|u\| + \|v\|.\end{aligned}\tag{1.77}$$

В лінійному нормованому просторі метрика уводиться як норма різниці між елементами

$$\rho(u, v) = \|u - v\|.$$

Найбільш вживаними нормами є:

$L^1$  – норма – середнє значення похибки на інтервалі  $[0, T]$

$$\|f(u)\|_{L^1} = \frac{1}{T} \left| \int_0^T f(u) du \right|.\tag{1.78}$$

$L^2$  – норма – ефективне значення похибки на інтервалі  $[0, T]$

$$\|f(u)\|_{L^2} = \frac{1}{T} \left| \int_0^T f^2(u) du \right|.\tag{1.79}$$

$M$  – норма – мажоранта для всіх значень абсолютної похибки

$$\|f(u)\|_M = \max_u |f(u)|.\tag{1.80}$$

Послідовність  $\{u_n\}$  елементів простору  $U$  є таким, що збігається до елементу  $u_0 \in U$ , якщо з того, що  $\|u_m - u_n\| \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0$ , випливає існування такого  $u_0 \in U$ , що  $u_n \rightarrow u_0$ .

Нормований простір  $U$  є повним, якщо кожна послідовність  $\{u_n\}$  є такою, що збігається.

Повний нормований простір є Банаховим простором (або  $B$ -простором).

**1.5.2 Аналіз похибок математичного моделювання динамічних систем, які описуються диференціальними рівняннями.** При комп'ютерному дослідженні динамічних систем, вважаючи математичні постановки реальних задач, переважно застосовують числові методи розв'язування диференціальних рівнянь.

Аналіз похибок, які виникають при числовому розв'язуванні диференціальних рівнянь, розглянемо на прикладі задачі Коші, що, напевно, не зменшує загального характеру аналізу.

Тоді нехай поставлено задачу Коші на відрізку  $[t_0, t_N]$  у вигляді:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f[\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t), t]; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.81)$$

де  $t$  – незалежна змінна;

$\mathbf{q}(t)$  –  $m$ -мірний вектор параметрів;

$f$  – вектор-функція;

$\mathbf{x}(t)$  –  $n$ -мірний вектор вхідних координат.

Для розв'язування системи (1.81) можна застосувати будь-який з числових методів [160], причому, значення шуканої функції визначаються у фіксованих точках  $t_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Оцінимо похибку на певній ділянці розв'язку, вважаючи, що похибка перебуває у припустимих межах.

Зазначимо, що через методичну похибку  $\delta_a$  та похибки округлення траєкторії точки у фазовому просторі, розв'язки, отримані різними числовими методами, відрізняються між собою.

Для лінійного (знову ж таки, не порушуючи загального характеру викладення) аналогу диференціальної задачі (1.81) виду:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \varphi(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.82)$$

де  $\mathbf{A}(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1,\overline{n}}$ ,

$$\varphi = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)]^T,$$

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T,$$

$T$  – знак транспонування,

на відрізку  $[t_0, t_N]$  можна записати числовий розв'язок наступним чином

$$\tilde{\dot{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}^*(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) + \varphi(t); \quad \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0. \quad (1.83)$$

Похибка розв'язку рівняння (1.82) буде визначатися різницею виразів (1.82) та (1.83), або:

$$\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^*(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) + \Delta\mathbf{A}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = 0. \quad (1.84)$$

Тут  $\Delta\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^*(t)$ ;

$$\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t).$$

Якщо елементи матриць та векторів у виразі (1.84) є безперервними

функціями незалежної змінної  $t$ , то має місце оцінка

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \int_{t_0}^{t_N} \exp \left\{ \int_{t_0}^{t_N} \gamma \{ \mathbf{A}^* (\tau_1) \} d\tau_1 \|\Delta \mathbf{A}(\tau)\| \|\mathbf{x}(\tau)\| \right\} d\tau, \quad (1.85)$$

де

$$\gamma \{ \mathbf{A}^* (t) \} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{A}(t) - \Delta \mathbf{A}(t)\|}{h}.$$

У тих випадках, коли це можливо, для оцінки похибки розв'язків може бути застосовано методи теорії чутливості [161].

**1.5.3 Аналіз похибок математичного моделювання динамічних систем, які описуються інтегральними рівняннями.** Інтегральні рівняння є досить загальною формою математичного опису різних динамічних об'єктів. Лінійні нестационарні об'єкти, в загальному випадку, може бути описано лінійним рівнянням Вольтерри другого роду

$$y(x) + \int_0^x [K(x, s) y(s)] ds = f(x), \quad (1.86)$$

де  $K(x, s)$  – ядро;

$f(x)$  – відома функція (права частина);

$y(x)$  – шукана функція.

Частинним випадком (1.86) може бути опис *стаціонарних лінійних* об'єктів у вигляді:

$$y(x) + \int_0^x [K(x-s)y(s)] ds = f(x), \quad (1.87)$$

ядро якого залежить від різниці аргументів  $x$  та  $s$  і, тому називається *різницеvim*.

*Нелінійні* об'єкти може бути описано рівнянням наступного виду:

$$y(x) + \int_0^x \{K(x,s)F[y(s)]\} ds = f(x) \quad (1.88)$$

або більш загальним рівнянням

$$y(x) + \int_0^x \{K[x,s,y(s)]\} ds = f(x), \quad (1.89)$$

причому, у випадку *стаціонарних* об'єктів (я зазначалося – як частинного випадку), ядро в рівняннях (1.88), (1.89) є *різницеvim*.

При комп'ютерному розв'язуванні рівнянь (1.86)–(1.89) за допомогою методів математичного моделювання *актуальною* є задача отримання уявлень щодо можливих *похибок розв'язків*, які неодмінно виникають у зв'язку із застосуванням числових (тобто *наближених*) методів моделювання. Така ж задача є *актуальною* і при пошуку *управління*, оскільки *синтез управляючих функцій* (суть – *зворотна* задача) ґрунтується на реалізації ММ динамічних (або *стаціонарних* – у частинному випадку) об'єктів, як етапу такого синтезу.

Відомий ряд робіт [94], [95], [164]–[173], в яких розглядаються питання *аналізу точності* розв'язування традиційних для комп'ютерних засобів диференціальних рівнянь. Отримані результати може бути частково використано

у застосуванні до інтегральних рівнянь, однак є також низка *якісних особливостей*, які слід враховувати.

При комп'ютерному розв'язуванні наведених рівнянь (1.86)–(1.89), як було зазначено вище, використовують наближені (числові) методи. Однак, без попередніх спеціальних перетворень, можливе розв'язування лише рівнянь виду:

$$y(x) + \int_0^x \left[ a_1 + a_2(x-s) + \dots + a_n \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \right] y(s) ds = f(x), \quad (1.90)$$

які описують лінійні стаціонарні об'єкти із зосередженими параметрами (ЗП-об'єкти) та еквівалентні диференціальним рівнянням виду

$$\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \varphi(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_n \varphi(x) = \psi(x), \quad (1.91)$$

де

$$y(x) = \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}.$$

Права частина (1.90) визначається функцією  $\psi(x)$  та початковими умовами для рівнянь (1.91).

В якості способу безпосереднього моделювання рівняння (1.90) зручно прийняти аналогову форму розв'язування рівняння (1.91), яка полягає у застосуванні замкнутої моделюючої схеми, яка містить послідовний ланцюжок з  $n$  інтеграторів.

Якщо розв'язується рівняння (1.87) з довільним різницеvim ядром, то для застосування методу безпосереднього моделювання необхідно виконати попередню апроксимацію ядра.

Слід зазначити, що для лінійних та таких, які добре лінеаризуються, інтегральних рівнянь похибка може виражена за допомогою фундаментальної формули похибок [174]–[178]. Дійсно, комп'ютерний розв'язок можна представити таким, що залежить від ряду величин  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , які характеризують параметри ММ, вхідні впливи тощо, відхилення яких і викликають похибку отриманого результату. За наявності відхилень реальний розв'язок шляхом розкладання у обмежений ряд Тейлора може бути представлено наступним чином:

$$Y(x, q_1 + \Delta q_1, q_2 + \Delta q_2, \dots, q_n + \Delta q_n) \cong Y(x, q_1, q_2, \dots, q_n) + [u_1(x)\Delta q_1 + u_2(x)\Delta q_2 + \dots + u_n(x)\Delta q_n], \quad (1.92)$$

де  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  – коефіцієнти впливу або чутливості.

Віднімаючи з правої частини (1.92) точний розв'язок  $Y(x, q_1, q_2, \dots, q_n)$  – тобто перший доданок – можна записати похибку

$$\Delta Y(x) = u_1(x)\Delta q_1 + u_2(x)\Delta q_2 + \dots + u_n(x)\Delta q_n. \quad (1.93)$$

Таким чином, для достатньо наближеного визначення похибки розв'язку необхідно знати відхилення параметрів  $q_1, q_2, \dots, q_n$  (або їх вірогіднісні характеристики) та визначити коефіцієнти їх впливу.

Для віднаходження коефіцієнтів чутливості (у випадку лінійного рівняння) можна отримати відповідне рівняння. Будемо вважати, що параметри  $q_1, q_2, \dots, q_n$  визначаються внутрішніми властивостями ММ, тобто входять до ядра рівняння, що розв'язується комп'ютерними засобами, і яке, в такому випадку, має вигляд:

$$Y(x) + \int_0^x [K_M(x, s, q_1, q_2, \dots, q_n)Y(s)]ds = f(x). \quad (1.94)$$

Виконуючи диференціювання обох частин (1.86) по параметрах  $q_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), отримаємо

$$\frac{\partial Y(x)}{\partial q_i} + \int_0^x \left[ \frac{\partial K_M(x, s, q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial q_i} Y(s) \right] ds = 0. \quad (1.95)$$

Уводячи позначення

$$\frac{\partial Y(x)}{\partial q_i} = u_i(x), \quad \frac{\partial K_M(x, s, q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial q_i} = K'_{Mq_i}(x, s, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

отримаємо шукані рівняння:

$$\begin{aligned} u_i(x) + \int_0^x [K_M(x, s, q_1, q_2, \dots, q_n) u_i(x)] ds = \\ = - \int_0^x [K'_{Mq_i}(x, s, q_1, q_2, \dots, q_n) Y(s)] ds. \end{aligned} \quad (1.96)$$

В якості функції  $Y(s)$  в правій частині (1.88) можна використати наближений розв'язок. Як видно, для визначення коефіцієнтів чутливості можна використати основну ММ, що реалізується комп'ютерними засобами, оскільки ядро рівняння (1.96) співпадає з ядром рівняння (1.86), яке розв'язується.

Таким самим чином можна отримати рівняння чутливості для нелінійного рівняння (1.88). Відповідне йому машинне рівняння має вигляд:

$$Y(x) + \int_0^x \{K_M(x, s, q_1, q_2, \dots, q_n) F[Y(s)]\} ds = f(x). \quad (1.97)$$

Диференціювання (1.97) дає

$$\frac{\partial Y(x)}{\partial q_i} + \int_0^x \left\{ \frac{\partial K_M(x, s, q_1, q_2, \dots, q_n) F[Y(s)]}{\partial q_i} \right\} ds = 0$$

або

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y(x)}{\partial q_i} + \int_0^x \left\{ K'_{Mq_i}(x, s, q_1, q_2, \dots, q_n) F[Y(s)] + \right. \\ \left. + K_M(x, s, q_1, q_2, \dots, q_n) F'(s) \frac{\partial Y(s)}{\partial q_i} \right\} ds = 0. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Враховуючи уведене раніше позначення для  $u_i(x)$ , можна отримати:

$$\begin{aligned} u_i(x) + \int_0^x [K_M(x, s, q_1, q_2, \dots, q_n) F'(s) u_i(s)] ds = \\ = - \int_0^x \left\{ K'_{Mq_i}(x, s, q_1, q_2, \dots, q_n) F[Y(s)] \right\} ds; \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Отримані рівняння чутливості є лінійними, на відміну від вихідного рівняння (1.88). Для їх розв'язування може бути використано ММ, яка реалізується комп'ютерними засобами, в якій нелінійне перетворення шуканої функції по закону  $F[\cdot]$  замінено множенням її на змінний коефіцієнт  $F'[\cdot]$ . Для відтворення правої частини (1.99) також можна використати отриману раніше комп'ютерним розв'язуванням функцію  $Y(x)$ .

Слід зазначити, що загальне рівняння (1.72) може бути приведено до більш простому виду (1.63), який допускає дослідження похибок.

Якщо функцію  $K[x, s, y(s)]$  може бути розкладено у ряд Маклорена [179]–[183] по ступенях  $x(t)$ :

$$K[x, s, y(s)] \cong \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K_x^{(i)}[x=0, s, y(s)]}{x!} x^i$$

і ряд збігається в області зміни  $x$  та  $s$ , то можна виконати наближену заміну

$$K[x, s, y(s)] \cong \sum_{i=0}^m \frac{K_x^{(i)}[x=0, s, y(s)]}{x!} x^i; \quad i = \overline{1, m}$$

та розв'язувати наближене рівняння

$$y(x) + \int_0^x \sum_{i=0}^m \frac{K_x^{(i)}[x=0, s, y(s)]}{i!} x^i = f(x).$$

Як і у випадку диференціальних рівнянь, для лінійних інтегральних рівнянь можна отримати *рівняння для похибки*.

Можна вважати, що при розв'язуванні (1.86) машинне рівняння має вигляд:

$$\tilde{y}(x) + \int_0^x [\tilde{K}(x, s) \tilde{y}(s)] ds = \tilde{f}(x), \quad (1.100)$$

де ядро  $\tilde{K}(x, s)$  враховує *первинні похибки моделювання (методичну та інструментальну похибки)* і являє собою суму

$$\tilde{K}(x, s) = K(x, s) + \Delta K(x, s).$$

Права частина  $\tilde{f}(x)$  виразу (1.100) містить *похибку зовнішнього збудження*

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \Delta f(x).$$

При цьому наближений розв'язок  $\tilde{y}(x)$ , представлений виразом (1.100), визначається співвідношенням

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \Delta y(x),$$

де  $\Delta y(x)$  – сумарна похибка розв'язку.

Тоді, віднімаючи вираз (1.69) з (1.83), можна отримати

$$\Delta y(x) + \int_0^x \{ [K(x, s) + \Delta K(x, s)] [y(x) + \Delta y(x)] - K(x, s) y(s) \} ds = \Delta f(x).$$

Розкриваючи дужки під інтегралом і вважаючи похибки  $\Delta K(x, s)$  та  $\Delta y(x)$  настільки малими, що їх добутком можна знехтувати, отримаємо шукане рівняння

$$\Delta y(x) + \int_0^x [K(x, s) \Delta y(s)] ds = \Delta f(x) - \int_0^x [\Delta K(x, s) y(s)] ds. \quad (1.101)$$

Цим рівнянням для обчислення похибки  $\Delta y(x)$  складно скористатися з огляду через невизначеність завдання первинних похибок, яка зазвичай має місце, а також у зв'язку з тим, що замість істинного розв'язку  $y(s)$  в правій частині необхідно використовувати наближене. Однак воно може використовуватися для *якісного дослідження похибок*, оскільки, зокрема, показує що різні складові сумарної похибки можуть бути визначені окремо (залишаючи в правій частині тільки  $\Delta f(x)$ ), можна визначити *наслідкову похибку* результату, а залишаючи лише

інтеграл – *похибку моделювання*). Крім того, рівняння для похибки дозволяє виконати *оцінку похибки*.

Зокрема (у вигляді тестової задачі), якщо  $(x, s)$  належить області  $D$  ( $(x, s) \in D$ );  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq s \leq b$  і, при цьому, можна завдати обмеження

$$\max_{(x,s) \in D} |K(x, s)| \leq K, \quad \max_{(x,s) \in D} |\tilde{K}(x, s)| \leq \tilde{K}, \quad \max_{(x,s) \in D} |\Delta K(x, s)| \leq \delta,$$

$$\max_{(x,s) \in D} |\tilde{f}(x)| \leq f, \quad \max_{(x,s) \in D} |\Delta f(x)| \leq \eta,$$

то, використовуючи вище наведені результати, можна отримати оцінку

$$\Delta y(x) \leq \left[ f \delta \frac{e^{(K-\tilde{K})x} - 1}{K - \tilde{K}} + \eta \right] e^{\tilde{K}x}.$$

При  $K = \tilde{K}$  дана оцінка спрощується:

$$\Delta y(x) \leq (f \delta x + \eta) e^{Kx}.$$

Таким чином, з наведеного аналізу випливає, що існує декілька шляхів отримання відомостей щодо *похибок розв'язків інтегральних рівнянь*, які виникають при числовій реалізації їх (як відповідних ММ динамічних об'єктів) із застосуванням комп'ютерно-орієнтованих методів.

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

Показано, що переважна більшість промислових (технологічних) та природно важливих процесів і об'єктів характеризуються змінними в часі поведінкою та станами, тобто являють собою *динамічні системи*. При математичній формалізації це означає, що шукані функції стану (наприклад, тиск температура, концентрація речовин в хімічних реакціях, електрична напруга тощо) в якості незалежного мають параметр часу, який визначає *швидкість* зміни шуканих функцій, тобто їх *динаміку*.

Виконано аналіз підходів до математичної *формалізації* (суть – складання *математичних моделей*) динамічних систем. Визначено, що адекватними математичними моделями динамічних систем слід вважати диференціальні та інтегральні рівняння, які є формалізованими аналогами природної поведінки динамічних систем.

На типових прикладах поширених промислових об'єктів (процесів) та природних явищ показано особливості математичного опису динамічних систем в термінах апаратів диференціальних (у повних та у частинних похідних) та інтегральних рівнянь. Показано, що в прикладному аспекті найбільш поширеними задачами дослідження динамічних систем є *моделювання* (визначення динаміки функцій стану) та пошук *управління* (законів зміни зовнішніх – управляючих – функцій, що забезпечують досягнення функціями стану динамічних систем бажаних значень) останніми.

Проведено аналіз методів розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь різних типів, що застосовуються в якості ММ динамічних систем. Також проаналізовано *похибки*, які виникають при числовому розв'язуванні відповідних диференціальних та інтегральних рівнянь, їх (похибок) характер та шляхи зменшення чи усунення. Крім того розглянуто переваги і недоліки алгоритмічних та програмно-апаратних засобів, які застосовуються при розв'язуванні задач моделювання динамічних систем та пошуку законів управління ними.

## 2 МЕТОД РАНЖИРУВАННЯ ЗА ПОХИБКОЮ ДЛЯ ОЦІНКИ ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ ТА УПРАВЛІННЯ НИМИ

2.1 Аналітична формалізація процедури ранжирування на основі апарату диференціальних і інтегральних рівнянь в задачах моделювання та управління

Одним з основних *якісних показників* обчислювальних засобів є *точність* результатів розв'язування ними прикладних задач, зокрема, задач моделювання та управління динамічними системами. Однак, не дивлячись на широке використання засобів обчислювальної техніки (ОТ), *проблему оцінки точності обчислень* не можна вважати розв'язаною, а її актуальність зростає у зв'язку зі швидким розвитком та поширенням кібернетичних засобів різного призначення. Гострота проблеми полягає у *складності аналізу похибок обчислень*, яка призводить до громіздкості аналітичних обґрунтувань та до великого обсягу обчислень, необхідних для отримання конкретних числових даних.

Для рішення багатьох технічних та науково-дослідницьких задач широко застосовуються як *універсальні*, так і *спеціалізовані* засоби ОТ. Характерною відмінністю останніх від універсальних засобів ОТ є навмисно вузький клас алгоритмів, які реалізуються, орієнтований на розв'язування обмеженого кола прикладних задач. При цьому, природно, передбачається досягнення низки певних (у порівнянні з універсальними засобами ОТ) переваг, до яких, зазвичай, відносяться один або група факторів, таких, як підвищена швидкодія, неаналітичний спосіб розв'язування задач (для аналогових спеціалізованих засобів ОТ), зменшені масо-габаритні характеристики та вартість, тощо. Слід зазначити, що проблема *точності* є актуальною як для універсальних, та і для спеціалізованих засобів ОТ, дещо трансформуючись, в залежності від типу засобу та принципу його дії, наприклад, своєрідність первинних похибок [184]–[190].

Для подальших розмірковувань будемо вважати, що засобами ОТ розв'язуються задачі, які описуються в рамках узагальненої ММ виду (1.29), і які дозволяють представлення у наступному вигляді:

$$A_k y = x, \quad (2.1)$$

де  $A_k$  – оператор, який є елементом певного набору можливих операторів для конкретної задачі (або типу засобу ОТ);

$y, x$  – шуканий розв'язок та відома права частина (числа, вектори, функції), які мають свої обмежені області визначення.

*Первинні похибки* у початкових даних призводять до необхідності розв'язувати наближену задачу

$$\tilde{A}_k \tilde{y} = \tilde{x}, \quad (2.2)$$

де  $\tilde{A}_k = A_k + \Delta A_k, \tilde{x} = x + \Delta x$ .

*Машинний (наближений) розв'язок* можна виразити у вигляді:

$$\tilde{y} = R_m \tilde{x}, \quad (2.3)$$

де  $R_m$  – машинний алгоритм, який являє собою систему операцій в універсальних або спеціалізованих засобах ОТ, а таму зосереджують в собі всю сукупність первинних інструментальних похибок, а також похибку метода розв'язування, який реалізується.

Похибка розв'язку, що очевидно, визначається як:

$$\Delta y = \tilde{y} - y, \quad (2.4)$$

може бути віднайдена лише при відомому точному розв'язку  $y$ , що обмежує прикладне застосування (2.4) в якості розрахункового виразу лише випадками розв'язування тестових (контрольних) задач. Однак на практиці використовують метод аналізу похибки при більш точних контрольних розрахунках, що відповідає наступному виразу для похибки

$$\Delta y = \tilde{y} - \bar{y}, \quad (2.5)$$

де  $\bar{y}$  – також машинний, але завідома більш «точний» розв'язок, який можна визначити як:

$$\bar{y} = \bar{R}_m \tilde{x}, \quad (2.6)$$

де  $\bar{R}_m$  – машинний алгоритм, який забезпечує підвищену точність розв'язку.

Це, зазвичай, досягається за рахунок застосування більш «удосконаленого» обчислювача, хоча задля підвищення надійності контролю корисно реалізувати інший, можливо, більш точний метод розв'язування.

Перетворюючи (2.4), отримаємо

$$\Delta y = R_m \tilde{x} - A_k^{-1} x, \quad (2.7)$$

яке може бути прийнято за вихідне рівняння похибки.

Представляючи похибку розв'язку як результат перетворення первинних похибок  $q_s$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ )

$$\Delta y = F[q_s], \quad (2.8)$$

можна стверджувати, що перетворення  $F$  визначається двома основними факторами: властивостями задачі, яка розв'язується та властивостями точності засобу ОТ, що являє собою відоме положення, яке є джерелом багаточисельних ускладнень при аналізі точності обчислень [191]–[193]. В точному вигляді залежність (2.8) побудувати, як правило, не вдається [19], [22], [194]–[196] а з різноманіття наближень для  $F$  вдається віднайти лише деякі придатні для практичного застосування перетворення [19], [20]. Одним з прикладів таких наближень може слугувати представлення похибки у вигляді усіченого ряду Тейлора, яке можна записати у вигляді

$$\Delta y \approx \phi[q_s],$$

де  $\phi[\cdot]$  – оператор, який визначається незмінними для даної задачі параметрами (коефіцієнтами впливу).

В якості шляху, який дає змогу спростити наступний за процесом розв'язування задачі не менш трудомісткий процес *аналізу точності результату* (або підвищити його *оперативність*), можна представити перенесення, що найменше частини цього (останнього) процесу на період, що передує розв'язуванню. Цей шлях [20] полягає у попередньому обчисленні залежностей похибки  $\Delta y$  (а, практично, її характеристик) від характеристик первинних похибок за допомогою послідовного перебору можливої множини цих первинних похибок.

Отриманих таким чином залежностей достатньо, щоб по них *оперативно* оцінювати точність засобу ОТ, що розв'язує яку-небудь задачу з характером похибок вихідних даних, які змінюються.

Очевидно, що розбиття на класи за точністю (тобто *ранжирування*) має бути проведено таким чином, щоб кількість їх задовольняло двом суперечливим вимогам: воно повинно бути достатньо великим, щоб забезпечувати придатну диференціацію показників точності, і, в той самий час, не настільки великим, щоб

слугувати перешкодою простому та зручному визначенню приналежності кожній конкретній задачі до якогось класу.

Враховуючи багаточисельність первинних похибок, значний обсяг обчислень, які супроводжують здійснення наведених вище процедур, а також складність вихідних залежностей (2.7), можна дотримуватися наступного алгоритму:

1) Обрати показник точності розв'язку  $T[\Delta y]$ , який несе достатньо повну інформацію щодо похибки, і який ефективно може бути визначений шляхом числового експерименту.

2) Застосувати серію комп'ютерних розрахунків (експериментів) щодо побудови залежностей  $T[\Delta y]$  від первинних похибок  $q_s$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) на множині можливих задач. Цілковитим припустимо в даному разі використання сітки еталонних задач, що «дискретно» представляють та охоплюють всю множину задач, які розв'язуються, що, у підсумку, дозволяє використовувати інтерполяційний підхід при дослідженні точності будь-якої з можливих задач, які не співпадають ні з однією з еталонних, але для яких може бути віднайдена найбільш близька (в смислі точності) еталонна задача.

3) Виділити в процесі цих розрахунків групи, близьких залежностей, що поєднують окремі задачі у *класи точності*. При цьому можлива автоматизація процесу класифікації у відповідності з методами розпізнавання, коли комп'ютер сам групує задачі (залежності) та відшукує критерій схожості.

4) Виділити показники точності задачі

$$Q_\zeta = Q_\zeta(A_k, x); (\zeta = 1, 2, \dots, \zeta \leq s), \quad (2.9)$$

які дозволяють за допомогою деякого, нескладного правила  $C$  визначати приналежність  $K$ -ї задачі  $L$ -му класу по параметрах точності

$$Q_L \cong C[Q_K]; (L = 1, 2, \dots, L \leq \zeta). \quad (2.10)$$

Система даних параметрів повинна забезпечувати швидку орієнтацію в об'ємній множині робочих залежностей між  $T_{K,s}[\Delta y]$  та  $q_s$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ), прикладами яких можуть бути оцінки виду:

$$T_{K,s}[\Delta y] > \Phi_1(q_s), \quad T_{K,s}[\Delta y] < \Phi_2(q_s), \quad (2.11)$$

де  $\Phi_1(\cdot)$  та  $\Phi_2(\cdot)$  – деякі оператори, що реалізуються в процесі моделювання.

Слід зазначити, що у розглянутому алгоритмі можуть у повній мірі використовуватися прийоми притаманні відомим методам [94], [197]–[199]: використання, більш інтенсивне та зсунуте в часі у порівнянні з методом контрольних розрахунків, машинних розв'язків для еталонних задач у відповідності з (2.6); отримання характеристик точності по характеристиках первинних похибок (метод статистичного моделювання [200]–[202]); опис по точності задач за допомогою параметрів, частинним випадком яких є *коефіцієнти чутливості*; застосування оціночних залежностей виду (2.11), які отримали розвиток у методах віднаходження оцінок для похибок по нормах та граничних значеннях для вихідних даних та похибках [203]–[206].

В такому разі можна стверджувати, що в основі методу, який розглядається нижче [20], покладено принцип *ранжирування за похибками* задач та засобів ОТ, який полягає в оцінці похибок розв'язків за допомогою асоціативних залежностей між показниками точності, які цікавлять, та первинними похибками, отриманими в результаті попереднього процесу розв'язування задачі моделювання та класифікацією за точністю задач, які розв'язуються, за допомогою системи еталонних прикладів.

## 2.2 Метод ранжирування за похибками при реалізації математичних моделей динамічних систем в задачах моделювання та управління

В літературі відомі методи аналізу точності [207]–[209] при числовому розв’язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (2.12)$$

де  $\mathbf{A}$  – неособлива матриця  $n$ -го порядку;

$\mathbf{b}$  та  $\mathbf{x}$  –  $n$ -мірні вектори правої частини та шуканого розв’язку, серед яких, зокрема, найбільшого поширення набули: методи класичної теорії точності (*теорії чутливості* [210]–[215]), проведення завідома більш точних обчислень при розв’язуванні задачі, застосування аналітичних оцінок типу нерівності [216]–[219].

Розглянемо можливість теоретичного створення, а також запропонуємо процедуру методу *ранжирування за похибками* – тобто розмежування «по рівнях» (або, інакше, *тарифування* – тобто розмежування «за вагою») при реалізації ММ динамічних систем в задачах моделювання та управління [20]. При цьому зауважимо, що застосування методів теорії чутливості та проведення завідома більш точних обчислень при розв’язуванні задачі необхідні громіздкі розрахунки, які можна порівняти за обсягом обчислень з розв’язком поставленої задачі або, навіть такі, що перевищують цей обсяг. Застосування аналітичних оцінок типу нерівностей є більш економічним (в смислі трудомісткості обчислень), однак результати аналізу, що можна отримати, як правило, занадто грубі.

Принцип ранжирування, аналітична формалізація процедур якого розглянута у розділі 2.1, надає певні можливості щодо усунення вказаних вище ускладнень. Ці можливості полягають в тому, що основна частина обчислень при аналізі точності виконуються завчасно, результатом чого є таблиці (або графіки), що відбивають залежність показників точності від первинних похибок для різних класів задач. Підготовлені у такий спосіб дані дозволяють достатньо оперативно,

з невеликими обчисленнями, отримати числові характеристики похибок, якщо вдається «успішно» встановити приналежність конкретної задачі, яка розв'язується, до одного з «проранжированих» класів.

Щоб подолати труднощі, пов'язані з недостатнім обсягом відомостей щодо отримуваних показників, будемо пропонувати враховувати *статистичний характер первинних похибок* для отримання *ефективних* (близьких до істинної похибки) оцінок повної похибки.

Можна зауважити, що для застосування принципу ранжирування по відношенню до системи (2.12), необхідно розв'язати низку задач, зокрема: задачу *класифікації* ММ, які реалізуються; віднаходження реальних процедур обчислення ймовірностних показників точності; складання програм обчислень ефективних оцінок похибок, тощо.

Для розробки методу ранжирування при реалізації ММ динамічних систем в задачах моделювання та управління [20] виконаємо аналіз *неусувної* похибки розв'язку системи (2.12), яка виникає при розгляді останньої у стані збудження:

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}, \quad (2.13)$$

де  $\Delta\mathbf{A} = \{\Delta a_{ij}\}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  – матриця первинних похибок завдання коефіцієнтів матриці  $\mathbf{A}$ ;

$\Delta\mathbf{b} = \{\Delta b_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$  – вектор похибок (збуджень) правих частин;

$\Delta\mathbf{x}$  – вектор похибок розв'язку.

В якості вихідної оцінки неусувної похибки оберемо оцінку норми вектора похибок [19], [220]–[223]

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}\|, \quad (2.14)$$

де  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{b}$  – вектор нев'язок.

Застосування оцінки (2.14) обмежено випадком, коли «точно» відомі матриця  $\mathbf{A}$  та вектор  $\mathbf{b}$ . Тим не менш, вона найліпше підходить до побудови процесу, який зазнає ранжирування, оскільки дозволяє [20], [23] отримувати розподіли для величини  $\|\Delta\mathbf{x}\|$ , виходячи з функції розподілу норми вектора нев'язок  $\varepsilon$ , що, у свою чергу, дає можливість визначити границю довірливості для похибки, яка аналізується.

Компоненти вектора нев'язок  $\varepsilon$  як правило є незалежними нормально розподіленими випадковими величинами з параметрами

$$m_{\varepsilon_i} \approx m_{\Delta b_i} - \sum_{j=1}^n m_{\Delta a_{ij}} x_j; \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.15)$$

$$\sigma_{\varepsilon_i} \approx \left( \sigma_{\Delta b_i}^2 + \sum_{j=1}^n \sigma_{\Delta a_{ij}}^2 x_j^2 \right)^{1/2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.16)$$

де  $m_{\Delta b_i}$ ,  $m_{\Delta a_{ij}}$ ,  $\sigma_{\Delta b_i}^2$ ,  $\sigma_{\Delta a_{ij}}^2$  – математичні очікування та дисперсії відповідних випадкових величин;

$x_j$  – компоненти розв'язку (2.12).

Внаслідок використання представлення вектора нев'язок  $\varepsilon$  у вигляді

$$\varepsilon = \mathbf{D}\varepsilon_0 + \mathbf{m}_\varepsilon,$$

де  $\mathbf{D}$  – діагональна матриця, елементи якої визначаються за виразом (2.16);

$\mathbf{m}_\varepsilon$  – вектор, компоненти якого визначаються за виразом (2.15);

$\varepsilon_0$  – випадковий нормальний вектор з нульовим середнім та одиничною

кореляційною матрицею, для цього вектора можна отримати наступну оцінку

$$\|\Delta \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| (\|\mathbf{D}\| \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\| + \|\mathbf{m}_\varepsilon\|), \quad (2.17)$$

яку, як і відповідну оцінку для *відносної* похибки, вже можна використовувати для порівняння СЛАР за точністю, причому критерієм класу є порядок системи  $n$ , параметром точності класу – функція розподілу  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|$ , параметрами точності задачі – величини  $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ ,  $\|\mathbf{D}\|$  та  $\|\mathbf{m}_\varepsilon\|$ .

Питання щодо обчислення функції розподілу деяких норм вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  розглядалися в роботі [224] з позицій використання наявних табульованих функцій (нормальна функція розподілу, розподіл  $\chi^2$ ). Для мети ж ранжирування представляється доцільним табулювання функцій розподілу різних норм вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  для різних СЛАР. При цьому значення функцій розподілу  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1$  можна обчислити за формулою

$$F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1, n}(\tau) = \left( \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\tau e^{-(t/2)^2} dt \right)^n, \quad (2.18)$$

значення функції розподілу  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_2$  – за формулою

$$F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_2, n}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\tau \left[ F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_2, n-1}(t) e^{-(\tau-t/2)^2} \right] dt, \quad (2.19)$$

Причому

$$F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_2, 2}(\tau) = F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1, 2}(\tau/\sqrt{2}). \quad (2.20)$$

Наявність цих функцій розподілу дозволяє легко будувати оцінку знизу для функцій розподілу  $\|\Delta \mathbf{x}\|$  ( $\|\Delta \mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ ) (або оцінку границі довірливості для похибки) шляхом зміни масштабу незалежної змінної відповідної функції розподілу величини  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|$  в  $\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{D}\|$   $\left[ \left( \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{D}\| \right) / \|\mathbf{x}\| \right]$  раз і зсув початку координат вліво на  $\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{m}_\varepsilon\|$   $\left[ \left( \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{m}_\varepsilon\| \right) / \|\mathbf{x}\| \right]$ .

Нижче в табл. 2.1–табл. 2.3 наведено лише  $p$ -квартилі (тобто, кожні з трьох значень, які можуть розділити групу чисел, упорядкованих від мінімального до максимального, на чотири рівні частини, причому у випадку, що розглядається – для групи чисел, отриманих із ймовірністю  $p$ ) функцій розподілу  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1$ ,  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_2$ ,  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_3$  для великих значень довірливої ймовірності  $p$ , що дає можливість будувати оцінки границь довірливості для похибок.

Наявність знаку нерівності у виразі (2.14) призводить до *завищення* відповідних оцінок точності. Уведемо випадкову величину  $T_i(\mathbf{A})$  (де  $(i = 1, 2, 3, \dots)$  – індекс норми), яку будемо називати у подальшому *коефіцієнтом корекції 1 роду*, причому таку, що

$$\|\Delta \mathbf{x}\|_i = T_i(\mathbf{A}) \|\mathbf{A}^{-1}\|_i \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_i. \quad (2.21)$$

Тоді, на підставі (2.14) та (2.21) витікає очевидне співвідношення

$$\|\Delta \mathbf{x}\|_i \geq \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_i / \|\mathbf{A}\|_i, \quad (2.22)$$

яке можна використовувати для побудови *оцінок зверху* функції розподілу  $\|\Delta \mathbf{x}\|_i$  (або *нижньої границі довірчої похибки*).

Уведемо також випадкову величину  $q_i(\mathbf{A})$  (де  $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$  – індекс норми), яку, відповідно, будемо називати *коефіцієнтом корекції 2 роду*, таку, що

Таблиця 2.1 –  $p$ -квартилі функцій розподілу  $\|\epsilon_0\|_1$ 

$p \backslash n$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>0,80</b>	1,925	2,018	2,092	2,153	2,204	2,250	2,290	2,325	2,357
<b>0,85</b>	2,056	2,145	2,216	2,275	2,325	2,368	2,407	2,441	2,472
<b>0,90</b>	2,227	2,311	2,379	2,434	2,482	2,524	2,560	2,593	2,623
<b>0,95</b>	2,492	2,570	2,632	2,683	2,738	2,767	2,800	2,831	2,858
<b>0,99</b>	3,025	3,087	3,144	3,178	3,226	3,260	3,290	3,316	3,342

$p \backslash n$	13	14	15	16	17	18	19	20	21
<b>0,80</b>	2,387	2,414	2,437	2,461	2,483	2,503	2,522	2,540	2,557
<b>0,85</b>	2,500	2,275	2,550	2,571	2,935	2,613	2,631	2,648	2,665
<b>0,90</b>	2,649	2,675	2,697	2,719	2,739	2,757	2,775	2,792	2,807
<b>0,95</b>	2,884	2,907	2,928	2,948	2,967	2,985	3,001	3,017	3,032
<b>0,99</b>	3,364	3,384	3,402	3,419	3,436	3,450	3,466	3,482	3,494

Таблиця 2.2 –  $p$ -квартилі функцій розподілу  $\|\epsilon_0\|_2$ 

$p \backslash n$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>0,80</b>	4,181	5,098	6,004	6,901	7,791	8,676	9,556	10,432	11,304
<b>0,85</b>	4,452	5,397	6,328	7,247	8,159	9,065	9,963	10,857	11,747
<b>0,90</b>	5,339	5,782	6,744	7,694	8,632	9,562	10,475	11,401	12,312
<b>0,95</b>	2,492	6,370	7,379	8,371	9,349	10,316	11,274	12,224	13,167
<b>0,99</b>	6,387	7,514	8,607	9,674	10,720	11,752	12,772	13,780	14,782

$p \backslash n$	13	14	15	16	17	18	19	20	21
<b>0,80</b>	12,202	13,069	13,934	14,794	15,656	16,515	17,371	18,227	19,081
<b>0,85</b>	12,625	13,508	14,388	15,265	16,140	17,013	17,883	18,752	19,619
<b>0,90</b>	13,159	14,062	14,961	15,857	16,750	17,640	18,527	19,413	20,296
<b>0,95</b>	13,949	14,880	15,809	16,733	17,652	18,568	19,482	20,392	21,992
<b>0,99</b>	15,433	16,418	17,400	18,375	19,348	20,312	21,274	22,229	23,182

Таблиця 2.3 –  $p$ -квартилі функцій розподілу  $\|\epsilon_0\|_3$ 

$p \backslash n$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>0,80</b>	2,447	2,700	2,926	3,131	3,231	3,499	3,667	3,825	3,977
<b>0,85</b>	2,597	2,849	3,074	3,279	3,468	3,645	3,813	3,971	4,122
<b>0,90</b>	2,789	3,040	2,263	3,467	3,655	3,832	3,998	4,156	4,307
<b>0,95</b>	3,081	3,328	3,549	3,751	3,938	4,114	4,379	4,436	4,586
<b>0,99</b>	3,644	3,884	4,100	4,297	4,482	4,656	4,819	4,974	4,121

$p \backslash n$	13	14	15	16	17	18	19	20	21
<b>0,80</b>	4,122	4,261	4,395	4,524	4,649	4,771	4,889	5,004	5,116
<b>0,85</b>	4,267	4,405	4,539	4,669	4,794	4,915	5,033	5,148	5,260
<b>0,90</b>	4,451	4,590	4,724	4,852	4,977	5,098	5,216	5,331	5,442
<b>0,95</b>	4,729	4,867	4,999	5,129	5,252	5,374	5,481	5,605	5,716
<b>0,99</b>	5,263	5,398	5,531	5,656	5,781	5,900	6,018	6,129	6,239

визначається виразом

$$\|\Delta \mathbf{x}\|_i = \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_i / (q_i(\mathbf{A}) \|\mathbf{A}\|_i). \quad (2.23)$$

З (2.21) та (2.23) витікає (за умови, що  $\Theta$  — внутрішня точка області  $\Omega$  можливих значень елементів  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ):

$$T_i(\mathbf{A}) q_i(\mathbf{A}) = 1 / (\|\mathbf{A}^{-1}\|_i \|\mathbf{A}\|_i); \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.24)$$

та

$$\max_{\boldsymbol{\varepsilon}_i \neq 0} T_i(\mathbf{A}) = \max_{\boldsymbol{\varepsilon}_i \neq 0} q_i(\mathbf{A}) = 1; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.25)$$

а з (2.24) та (2.25)

$$\min_{\boldsymbol{\varepsilon}_i \neq 0} T_i(\mathbf{A}) = \min_{\boldsymbol{\varepsilon}_i \neq 0} q_i(\mathbf{A}) = 1 / (\|\mathbf{A}\|_i \|\mathbf{A}^{-1}\|_i); \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Таким чином, нижня границя випадкових величин  $T_i(\mathbf{A})$  та  $q_i(\mathbf{A})$  залежить тільки від міри обумовленості матриці  $\mathbf{A}$ . Функції розподілу  $F_{T_i}(\tau)$  і  $F_{q_i}(\tau)$  величин  $T_i(\mathbf{A})$  та  $q_i(\mathbf{A})$  залежать як від обумовленості матриці  $\mathbf{A}$ , так і від розподілу вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  по області  $\Omega$ . Покладемо, що вектор  $\boldsymbol{\varepsilon}$  можна представити у вигляді:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad (2.26)$$

де  $\sigma$  — скаляр;

$\boldsymbol{\varepsilon}_0$  – випадковий нормальний вектор з нульовим середнім та одиничною кореляційною матрицею.

Таке представлення буде мати місце при виконанні наступних умов:

$$\left. \begin{aligned} M[\Delta b_i] &= M[\Delta a_{ij}] = 0, i, j = \overline{1, n}; \\ D[\Delta b_i] &= \sigma \Delta b, i = \overline{1, n}; \\ D[\Delta a_{ij}] &= \sigma \Delta a, i, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \right\}.$$

При цьому

$$\sigma = (\sigma_{\Delta b}^2 + \sigma_{\Delta a}^2 \|\Delta \mathbf{x}\|)^{1/2}. \quad (2.27)$$

Між  $F_{T_i}(\tau)$  і  $F_{q_i}(\tau)$ , як випливає з (1.24), існує зв'язок:

$$F_{q_i}(\tau) = \int_{\left[ \frac{1}{\tau} \|\mathbf{A}\|_i \|\mathbf{A}^{-1}\|_i \right]}^1 dF_{T_i}(t), \quad (2.28)$$

тобто, у подальшому, будемо розглядати лише  $T_i(\mathbf{A})$ , причому, за необхідності, з (2.28) легко отримати  $q_i(\mathbf{A})$ .

Можна показати, що при розподілі вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ , який розглядається (розподіл), випадкові величини  $T_i(\mathbf{A})$  та  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i$  є незалежними при  $i = n$  та залежні при  $i = \overline{1, (n-1)}$ . Однак залежність в останньому випадку має слабкий характер, а тому у практичних розрахунках нею можна знехтувати. Таким чином, знаючи функції розподілу величин  $T_i(\mathbf{A})$  та  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i$ , враховуючи (2.21) можна визначити функцію розподілу величини  $\|\Delta \mathbf{x}\|_i$ .

Визначимо можливість використання введених коефіцієнтів корекції  $T_i(\mathbf{A})$  для побудови придатних для ранжирування оцінок точності.

*Визначення 2.1.* Матриці  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{B}$  будемо називати  $T_i$ -подібними, якщо  $F_{T_i(\mathbf{A})}(\tau) = F_{T_i(\mathbf{B})}(\tau)$ , а  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  — випадковий  $n$ -мірний вектор з незалежними  $N$  розподіленими компонентами, причому значення цих компонент перебувають на відрізку  $[0,1]$ .

Має місце наступна теорема.

*Теорема 2.1.* Нехай  $\mathbf{A}$  —  $(n \times n)$ -неособлива матриця;  $\mathbf{B} = \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{A} \mathbf{\Pi}_2$ , де  $\mathbf{\Pi}_1$  — ортогональна, а  $\mathbf{\Pi}_2$  — неособлива матриця, такі, що  $T_i(\mathbf{\Pi}_1) = T_i(\mathbf{\Pi}_2) = 1$  для будь-якого вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ . Тоді матриці  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{B}$  —  $T_i$ -подібні.

*Доведення теореми 2.1.* За визначенням, коефіцієнт корекції 1-го роду для матриці  $\mathbf{B}$  дорівнює:

$$\begin{aligned} T_i(\mathbf{B}) &= \frac{\|\mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i}{\|\mathbf{B}^{-1}\|_i \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i} = \frac{\|\mathbf{\Pi}_2^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{\Pi}_1^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i \|\mathbf{\Pi}_1^{-1}\|_i}{\|\mathbf{B}^{-1}\|_i \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i \|\mathbf{\Pi}_1^{-1}\|_i} = \\ &= \frac{\|\mathbf{\Pi}_2^{-1}\|_i \|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{\Pi}_1^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i}{\|\mathbf{B}^{-1}\|_i \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i \|\mathbf{\Pi}_1^{-1}\|_i} = \alpha_b^{(i)} \frac{\|\mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i}, \end{aligned}$$

де  $\alpha_b^{(i)} = \|\mathbf{\Pi}_2^{-1}\|_i / \|\mathbf{B}^{-1}\|_i$ ,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{\Pi}_1^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_0.$$

Тоді очевидно можна записати:

$$T_i(\mathbf{A}) = \alpha_a^{(i)} \frac{\|\mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i},$$

де  $\alpha_a^{(i)} = 1 / \|\mathbf{A}^{-1}\|_i$ .

В силу ортогональності матриці  $\Pi_1$  та розподілу вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ , що розглядається, вектор  $\boldsymbol{\varphi}_0$  має такий саме розподіл, як і вектор  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ , а тому величини

$$\frac{\|\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\varphi}_0\|_i}{\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_i} \text{ та } \alpha_a^{(i)} \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i}$$

мають однакові закони розподілу. Враховуючи (2.25), отримуємо  $\alpha_a^{(i)} = \alpha_b^{(i)}$  та, таким чином,  $F_{T_i(\mathbf{A})}(\tau) = F_{T_i(\mathbf{B})}(\tau)$ , що і вимагалось довести.

Прикладами матриць  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ , що задовольняють умовам теореми 2.1, можуть слугувати *матриці перестановки* ( $i = \overline{1, n}$ ) та *матриці обертання* ( $i = n$ ). Таким чином, доведено існування множини матриць, які мають однакові ймовірнісні характеристики коефіцієнтів корекції, що, в свою чергу, важливо для практичних застосувань.

З іншого боку, нехай  $\overline{T}_{ij}$  – випадкова величина на відрізку  $[0, 1]$ , а  $F_{\overline{T}_{ij}}(\tau)$  – її функція розподілу, причому

$$F_{\overline{T}_{ij}}(\tau) \leq F_{T_i}(\tau) \text{ при } \mathbf{A} \in \mathbf{Q}_j, \quad (2.29)$$

де  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  – підмножина (яка не перетинається) деякої (вихідної) множини матриць  $\Xi$ .

Тоді з (2.21) та (2.29) випливає наступний вираз для ймовірностей:

$$p\{\|\Delta\mathbf{x}\|_i \leq \tau\} \geq p\{\overline{T}_{ij} \|\mathbf{A}^{-1}\|_i \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i \leq \tau\}, \quad (2.30)$$

який означає, що функції розподілу величини  $\overline{T}_{ij} \|\mathbf{A}^{-1}\|_i \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i$  є оцінкою знизу функції розподілу величини  $\|\Delta\mathbf{x}\|_i$  для будь-якої матриці з множини матриць  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Викладене вище вказує на *метод* використання коефіцієнтів корекції для *ранжирування за похибкою* (суть – *по точності*) при реалізації математичних моделей динамічних систем шляхом побудови множин (класів) матриць  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  та визначення  $F_{\overline{T}_{ij}}(\tau)$ ,  $j = \overline{1, m}$ . При цьому необхідно виконання наступних умов (*умов класу*):

– *умова якості класу* – функція розподілу коефіцієнтів корекції матриць з фіксованої множини  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  мають бути в певному сенсі близькі одна до іншої, причому ступінь близькості (або міра розсіювання) є характеристикою якості даного класу  $\mathbf{Q}_j$ ;

– *умова розрізняння класу* – наявність критерію приналежності конкретної задачі до певного класу, який реально може бути обчисленим (критерій класу).

При цьому практичний алгоритм розв’язування задачі щодо побудови множини матриць  $\Xi$  з наступним її розбиттям на класи  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  може бути представлений наступним чином:

1) Априорі формується критерій класу. Іншими словами, на першому етапі розв’язку необхідно априорі (умовно) розбити початкову множину матриць  $\Xi$  на  $m$  класів  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ . При цьому не слід вибирати  $m$  надто малим, оскільки ясно, що чим більше класів буде априорі визначено вибраним критерієм (тобто, чим менше буде ступінь варіації матриць з одного класу), тим вища можливість отримати класи з «хорошою» якістю. З іншого боку, число  $m$  не повинно бути занадто великим, оскільки значна кількість класів, отриманих априорі, призводить до значного обсягу обчислювальної роботи. Розв’язок практичних задач показав, що доцільно приймати  $m \approx 10$ .

2) Визначаються  $F_{\overline{T}_{ij}}(\tau)$  та оцінка якості  $C_{ij}$  кожного класу  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  для обраних норм  $i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Щодо обчислення  $F_{\overline{T}_{ij}}(\tau)$  та  $C_{ij}$  слід зазначити наступне. Аналітичне обчислення цих характеристик досить ускладнене, тому при розрахунках доцільно використовувати числові методи аналізу, що призводить до

необхідності заміни множини матриць  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  на деяку кінцеву підмножину  $\mathbf{Q}_{j_N}$ , яка складається з  $N$  матриць-представниць множини  $\mathbf{Q}_j$ . Також має сенс замість  $F_{\overline{T}_{ij}}(\tau)$ , яка визначається виразом (2.29), визначати таку функцію розподілу  $F_{\overline{T}_{ij}}^*(\tau)$  (тобто оцінку  $F_{\overline{T}_{ij}}(\tau)$ ), що  $p\left\{F_{\overline{T}_{ij}}^*(\tau) \leq F_{T_i(\mathbf{A})}(\tau), \mathbf{A} \in \mathbf{Q}_j\right\}$ . Практично  $F_{\overline{T}_{ij}}^*(\tau)$  можна визначати наступним чином:

$$P_{rij}^* = \bar{\mu}_{P_{rij}} + 3\bar{\sigma}_{P_{rij}}^2, \quad (2.31)$$

де  $P_{rij}^*$  –  $P_r$ -квартиль ( $P_r = r\Delta p$ ,  $r = \overline{0, R-1}$ ,  $R$  – число обчислених кварталів) функції розподілу  $F_{\overline{T}_{ij}}^*(\tau)$ ;

$\bar{\mu}_{P_{rij}}$ ,  $\bar{\sigma}_{P_{rij}}^2$  – оцінки внутрішньо-класних математичного очікування та дисперсії, відповідно;

$P_r$ -квартилі, які обчислюються за звичайними формулами для незміщених оцінок, а саме:

$$\bar{\mu}_{P_{rij}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P_{rij}(\mathbf{A}_k), \quad (2.32)$$

$$\bar{\sigma}_{P_{rij}}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_k \left[ P_{rij}(\mathbf{A}_k) - \bar{\mu}_{P_{rij}} \right]^2, \quad (2.33)$$

де  $(\mathbf{A}_k)$   $k = \overline{1, N}$  – матриць-представниць множини  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Для визначення  $F_{T_i(\mathbf{A}_k)}(\tau)$ , а точніше – оцінок  $P_r$ -квартилів  $P_{rij}(\mathbf{A}_k)$ , доцільно скористатися методом статистичних випробовувань [225]–[229], щоб побудувати статистичну функцію розподілу величини  $T_i(\mathbf{A})_k$  по виборці  $N$ .

Оцінку якості класу  $C_{ij}$  можна обчислити, припускаючи

$$C_{ij} = \frac{6}{R} \sum_{r=0}^{R-1} \bar{\sigma}_{P_{rij}}. \quad (2.34)$$

Прийнятий спосіб побудови  $F_{T_{ij}}^*(\tau)$  (вираз (2.31)) дозволяє вважати критичними похибки визначення оцінок  $\bar{\mu}_{P_{rij}}$  та  $\bar{\sigma}_{P_{rij}}^2$  ті, які призводять до занижених значень цих похибок, що дає змогу обирати  $N$ , виходячи з верхніх границь довірливості оцінок  $\bar{\mu}_{P_{rij}}$  та  $\bar{\sigma}_{P_{rij}}^2$ .

3) Визначення класів  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , для яких  $C_{ij} < C_{i0}$ , де  $C_{i0}$  — мінімальна оцінка якості класу.

Будемо виходити з припущення, що таких класів  $m_1$ . Далі, шляхом відповідної зміни критерію класу, розділимо множину  $\bigcup_s \mathbf{Q}_s$  на  $m_{s_1}$  підмножин  $\mathbf{Q}_{s_1}$ ,  $s_1 = \overline{1, m_{s_1}}$ , причому так, щоб виконувалося  $m_{s_1} > m_1$ . Після цього проводяться розрахунки для етапу 2, тоді – етапу 3, тощо, поки оцінки якості класів, що формуються, виявляться не гірше мінімальної. Такий ітераційний процес побудови класів із заданою якістю може збігатися в сенсі  $m_l \rightarrow 0$  при великих  $l$  ( $l$  – число повертань до 2-го етапу).

4) Використовуючи методи кластер-аналізу, наприклад, метод « $k$ -середніх» [230]–[233], проводиться групування  $m$  класів по заданій функції відстані між класами та критерію об'єднання класів (порогу відстані). Отримані в результаті такого групування класи утворюють субкласи. Оцінкою якості субкласу може слугувати мінімальна оцінка якості серед класів, які входять у субклас. Розв'язування тестових задач показує, що проведення такої класифікації матриць  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  дозволяє отримати більш ефективні (у порівнянні з [234], [235]) оцінки функції розподілу  $\|\Delta \mathbf{x}\|_i$  шляхом визначення класу  $\mathbf{Q}_j$ , якому

належить конкретна матриця  $\mathbf{A}$ , і побудови функції розподілу величин  $\bar{T}_{ij} \|\mathbf{A}^{-1}\|_{i\sigma} \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i$ , для чого необхідно мати функцію розподілу  $F_{\bar{T}_{ij}}(\tau)$  величини  $\bar{T}_{ij} \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i$ . Вважаючи величини  $\bar{T}_{ij}$  та  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i$  незалежними, функцію розподілу їх добутку порівняно легко оцінити, використовуючи кубатурну формулу:

$$F_{T_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau) = P\{\bar{T}_{ij} \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i \leq \tau\} > \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|} \left( \frac{\tau}{P_r} \right) = F_{T_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\tau), \quad (2.35)$$

де  $R$  – число інтервалів, на яке розбивається відрізок  $[0,1]$ ;

$P_r$  –  $r/R$ –квартиль.

Зазначимо, що запропоновані оцінки справедливі в рамках *лінійної теорії точності*.

Вище (вираз (2.28)) зазначалося, що при розподілі вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ , який розглядається (розподіл), випадкові величини  $T_i(\mathbf{A})$  та  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i$  є *незалежними* при  $i = n$  та *залежні* при  $i = \overline{1, (n-1)}$ . Доведемо це твердження для частинного випадку величин  $T_3(\mathbf{A})$  та  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_3$  (тобто для  $i = 3$ ).

Нехай  $T_\tau$  – множина векторів  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  така, що з  $\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in T_\tau$  випливає  $T_3(\mathbf{A})|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_0} \leq [T_3(\mathbf{A})|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_0} > \tau]$ . Із визначення  $T_3(\mathbf{A})$  вочевидь випливає наступна властивість  $T_\tau$ : якщо  $\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in T_\tau$ , то  $\alpha\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in T_\tau$  при будь-якому дійсному  $\alpha$ , відмінному від нуля.

Спільна функція розподілу величин  $T_3(\mathbf{A})$  та  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_3$  за визначенням є:

$$\begin{aligned} P\{T_3(\mathbf{A}) \leq \tau, \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_3 \leq \rho\} &= P\{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in T_\tau, \boldsymbol{\varepsilon}_0 \in S_\rho\} = \\ &= P\{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in S_\rho\} P\{(\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in T_\tau) / (\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in S_\rho)\} = P\{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in S_\rho\} P\{\mathbf{y}_0 \in T_\tau\}, \end{aligned}$$

де  $S_\rho$  – куля радіусу  $\rho$  (в смислі 3-ї норми –  $\|\cdot\|_3$ );

$y_0$  – випадковий вектор, який має усічений нормальний закон розподілу зі щільністю ймовірностей

$$f_{y_0}(z) = \begin{cases} f_{\varepsilon_0}(z) \text{ при } z \in S_\rho, \\ 0 \text{ при } z \notin S_\rho, \end{cases}$$

де  $f_{\varepsilon_0}(z)$  – щільність ймовірностей вектора  $\varepsilon_0$ .

Розглянемо випадковий вектор  $\varphi = y_0 / \|y_0\|_3$ . На підставі вказаної властивості множини  $T_\tau$  можна записати так:

$$P\{y_0 \in T_\tau\} = P\{\varphi \in T_\tau \cap \bar{S}_1\}, \quad (2.36)$$

де  $\bar{S}_1$  – одинична куля (сфера).

Для безумовної ймовірності маємо

$$P\{T_3(\mathbf{A}) \leq \tau\} = P\{\varepsilon_0 \in T_\tau\} = P\{\varphi_0 \in T_\tau \cap \bar{S}_1\}, \quad (2.37)$$

де  $\varphi_0 = \varepsilon_0 / \|\varepsilon_0\|_3$ .

Зрозуміло, однак, що як  $\varphi$ , так і  $\varphi_0$  розподілені по одиничній сфері  $\bar{S}_1$  з постійною щільністю ймовірності, так що у ймовірнісному сенсі ці вектори однакові, звідки впливає рівність лівих частин (2.36) та (2.37), що і завершує доведення висунутого вище твердження.

Розглянемо питання щодо *залежності* величин  $T_i(\mathbf{A})$  та  $\|\varepsilon_0\|_i$ ,  $i = \overline{1, (n-1)}$ . Для конкретності розгляду (але не позбавляючись загальності) у подальших розмірковуваннях приймемо (для простоти), що  $i=1$ . Нехай  $T'_\tau$  – множина векторів  $\varepsilon$ , аналогічна множині  $T_\tau$  з (2.36). Тоді спільна функція розподілу  $T_1(\mathbf{A})$

та  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1$  запишеться наступним чином:

$$P\{T_1(\mathbf{A}) \leq \tau, \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1 \leq \rho\} = P\{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in T'_\tau \cap S_\rho^1\},$$

де  $S_\rho^1$  – куля радіусу  $\rho$  в смислі 1-ї норми.

Якщо б  $T_1(\mathbf{A})$  та  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1$  були незалежними, то при будь-яких  $T'_\tau$  виконувалась би рівність

$$\begin{aligned} P\{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in T'_\tau \cap S_\rho^1\} &= P\{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in T'_\tau\} \times P\{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in S_\rho^1\} = \\ &= P\{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in T'_\tau\} \times P\{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in S_1\} = P\{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in T'_\tau \cap S_1\}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Справедливість останньої рівності в (2.38) впливає із доведення (2.36), що неможливо. Таким чином, величини  $T_1(\mathbf{A})$  та  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1$  є *залежними*. В той самий час, якщо величина

$$\Delta = \max_{\rho, \tau} \left| P\{T_1(\mathbf{A}) \leq \tau, \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1 \leq \rho\} - P\{T_1(\mathbf{A}) \leq \tau\} \times P\{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1 \leq \rho\} \right|$$

достатньо мала (слабка залежність  $T_1(\mathbf{A})$  та  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1$ ), то при обчисленні оцінок знизу функції розподілу  $T_1(\mathbf{A})$  та  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1$  можна замінити спільний закон розподілу добутком одновимірних.

З (2.38) отримуємо наступну оцінку для  $\Delta$

$$\Delta < \bar{\Delta}(\rho) = P\{\boldsymbol{\varepsilon} \in S_1 - S_\rho^1\}. \quad (2.39)$$

Обчислення правої частини (2.39) аналітичним шляхом може викликати складності, тому, щоб отримати представлення щодо ступеня залежності  $T_1(\mathbf{A})$  та

$\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1$ , доцільно скористатися методом статистичних досліджень (спираючись на числові розрахунки). Враховуючи сказане, результати розрахунків наведено у табл. 2.4, де  $n$  – розмірність вектора  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ . Обсяг вибірки векторів  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  було обрано  $10^4$ , що забезпечує достатню точність та надійність результатів.

Ці результати, з урахуванням грубості оцінки (2.39), а також того факту, що при побудові оцінки знизу функції розподілу величини  $T_1(\mathbf{A}) \times \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1$  критичні похибки виникають лише при

$$P\{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in T_\tau^1 \cap S_\rho^1\} < P\{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in T_\tau^1\} \times P\{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in S_\rho^1\},$$

а тому дозволяють знехтувати в практичних розрахунках залежністю величин  $T_1(\mathbf{A})$  та  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1$ . Очевидно, що в силу загальності, викладене може бути розповсюджено на випадок використання норм у діапазоні  $i = \overline{2, (n-1)}$ .

2.3 Побудова оцінок «знизу» функцій розподілу неусувної похибки реалізації ММ динамічних об'єктів, представлених диференціальними і інтегральними рівняннями, в задачах моделювання та управління із застосуванням методу ранжирування за похибкою

Застосування запропонованого методу ранжирування [20] щільно пов'язано із задачею *аналізу похибок* числової реалізації ММ досліджуваного класу систем (для чинної дисертаційної роботи – диференціальних та інтегральних рівнянь, які розглядаються в якості моделей динамічних систем). При цьому задача аналізу похибки моделювання динамічних систем (зокрема, в задачах моделювання та управління), зумовленої неточністю завдання самої моделі, зводиться до задачі оцінки *неусувної похибки* розв'язку математичних виразів, що утворюють дану ММ. Це також стосується випадку, коли неточно завдано вихідні матриця та вектор правих частин (наприклад, в рамках узагальненої ММ виду (1.29)).

Таблиця 2.4 – Результати статистичних досліджень залежності величин  $T_1(\mathbf{A})$  та  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1$

N	$\bar{\Delta}(\rho)$			
	$n = 6,$ $\rho = 1 + 0,2N$	$n = 11,$ $\rho = 1,8 + 0,2N$	$n = 16,$ $\rho = 2,4 + 0,2N$	$n = 21,$ $\rho = 3,05 + 0,2N$
1	0,0106	0,0132	0,0201	0,0231
2	0,0178	0,0250	0,0308	0,0366
3	0,0284	0,0379	0,0477	0,0559
4	0,0406	0,0541	0,0625	0,0746
5	0,0509	0,0694	0,0847	0,0937
6	0,0658	0,0839	0,0989	0,1136
7	0,0761	0,0973	0,1121	0,1278
8	0,0756	0,1020	0,1236	0,1396
9	0,0785	<b>0,1072</b>	0,1283	<b>0,1476</b>
10	<b>0,0834</b>	0,1059	0,1274	0,1390
11	0,0782	0,1003	<b>0,1301</b>	0,1333
12	0,0706	0,0949	0,1104	0,1209
13	0,0612	0,0852	0,0953	0,1046
14	0,0499	0,0706	0,0772	0,0859
15	0,0384	0,0581	0,0605	0,6581
16	0,0268	0,0436	0,0475	0,5214
17	0,0200	0,0329	0,0367	0,0392
18	0,0141	0,0236	0,0283	0,0297
19	0,0103	0,0172	0,0203	0,0214
20	0,0068	0,0129	0,0158	0,0159
$\max_{\rho} \bar{\Delta}(\rho)$	<b>0,0834</b>	<b>0,1072</b>	<b>0,1301</b>	<b>0,1476</b>

З огляду на процедуру числової реалізації виразів, що складають ММ будь-яких процесів та систем, саме *неточність введення вихідних даних* є основним джерелом похибок моделювання (рівно як і пов'язаної з моделюванням задачі управління), що і визначає важливість розробки практичних методів оцінки похибки через неточність завдання вихідних даних. З іншого боку, часто в практиці розв'язування задач моделювання (або управління), елементи як матриці  $\mathbf{A}$ , так і вектора  $\mathbf{b}$  правих частин рівняння (2.12), яке являє собою матричний аналог ММ (1.29), є величинами відомими лише з певним ступенем точності. В таких випадках аналіз неусувної похибки також має суттєве значення для правильної оцінки результатів розв'язку поставленої задачі моделювання (управління) і, поміж іншим, може бути обґрунтованою причиною переформулювання останньої.

Принагідно зазначимо, що *гарантовані оцінки* неусувної похибки розв'язку ММ досліджуваного класу систем у вигляді (2.12), дозволяють отримати верхню межу похибки, яка є гранично можливою (у рамках прийнятих припущень) похибкою розв'язку вихідної задачі моделювання (або управління). Ця обставина і визначає таку характерну особливість гарантованих оцінок як їх практично дуже сильну «завищеність» (грубість) і, як наслідок, неефективність, не зважаючи на те, що здебільшого, всі такі оцінки є такими, які не можна покращити, тобто їх не можна розглядати в якості точної верхньої межі для відповідних похибок [97], [236]–[240].

Практично «загрубленість» гарантованих оцінок є наслідком двох причин:

- при отриманні оцінок приходится здійснювати цілу низку переходів типу  $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$  та  $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$ , а кожний такий перехід вносить свій внесок у «загрубленість» кінцевого виразу;
- на практиці ані матриця  $\Delta\mathbf{A}$  похибок елементів вихідної матриці  $\mathbf{A}$ , ані вектор  $\Delta\mathbf{b}$  похибок вектору  $\mathbf{b}$  правих частин зазвичай невідомі. Тому при обчисленні оцінки похибки розв'язку [97], [187], [241] замість  $\|\Delta\mathbf{A}\|$  беруть

$\sup_G \|\mathbf{A}\|$ , а замість  $\|\Delta\mathbf{b}\| = \sup_{G_1} \|\mathbf{b}\|$  ( $G$  та  $G_1$  – множини, елементами яких є  $\Delta\mathbf{A}$  та  $\Delta\mathbf{b}$ , відповідно), беручи до уваги найгірший випадок.

В той самий час, у випадку, коли збудження  $\Delta\mathbf{A}$  та  $\Delta\mathbf{b}$  невідомі, їх елементи, зазвичай, є *випадковими* величинами, тому при цьому цілком природно виникає задача щодо визначення закону розподілу вектору (або його норми) неусувної похибки розв'язку ММ виду (2.12), знання якого (вектору) дозволяє отримати довірчу оцінку похибки  $C_{op}$  із заданою довірчою ймовірністю  $p$ . В такому разі можна стверджувати, що довірча оцінка похибки  $C_{op}$  при досить значних  $p$  є «кращою» в смислі «близькості» до похибок, які виникають практично, аніж гарантовані оцінки  $C_r$ , які, по суті, є ні що інше, ніж частинний випадок  $C_{op}$ , а саме

$$C_r = (C_{op}/p) = 1. \quad (2.40)$$

У зв'язку з цим, слід розробити практичний шлях побудови оцінок «кращих», ніж гарантовані, який буде полягати у визначенні певних оцінок «знизу» законів розподілу, що становлять зацікавленість, на основі яких можна отримувати довірчі оцінки  $C_p$  неусувної похибки розв'язку (2.12) з довірчою ймовірністю не меншою, ніж  $p$ , та за умови, що при цьому виконуються умови

$$\left. \begin{array}{l} C_p \geq C_r, \\ C_r = (C_{op}/p) = 1. \end{array} \right\} \quad (2.41)$$

Розглянемо більш детально питання побудови таких оцінок із застосуванням методу ранжирування за похибкою.

**2.3.1 Побудова оцінок «знизу» законів розподілу неусувної похибки, які базуються на застосуванні гарантованих оцінок.** У подальшому будемо вважати, що елементи збуджень  $\Delta\mathbf{A}$  та  $\Delta\mathbf{b}$  є випадковими величинами з відомими імовірнісними характеристиками.

Оцінюючий «знизу» закон розподілу для величин  $\|\Delta\mathbf{x}\|$  та  $\|\Delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$  (тобто тих, що визначають точність розв'язку рівняння (2.12)) можна отримати, визначивши закон розподілу правої частини відповідної гарантованої похибки. Без обмеження загальності, у подальшому, будемо розглядати наступні оцінки:

– для абсолютних похибок

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \leq \left\| \mathbf{A}^{-1} \left( \|\Delta\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| + \|\Delta\mathbf{b}\| \right) \right\| / \left( 1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{A}\| \right); \quad (2.42)$$

– для відносних похибок

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \left( \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right) / \left( 1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{A}\| \right). \quad (2.43)$$

У першому випадку випадкова величина, яка являє зацікавленість, є функцією двох випадкових величин  $\|\Delta\mathbf{A}\|$ ,  $\|\Delta\mathbf{b}\|$  та невідповідних параметрів  $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ ,  $\|\mathbf{x}\|$ . У другому випадку — функцію тих самих випадкових аргументів та невідповідних параметрів  $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ ,  $\|\mathbf{A}\|$ ,  $\|\mathbf{b}\|$ . При цьому слід зазначити, що величини  $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ ,  $\|\mathbf{x}\|$ , як правило, невідомі.

Для розв'язування поставленої задачі необхідно знати закони розподілу випадкових величин  $\|\Delta\mathbf{A}\|$ ,  $\|\Delta\mathbf{b}\|$ . Для їх відшукування запропонуємо наступні процедури.

1) Нехай задано  $n$ -мірний вектор  $\Delta \mathbf{b}$ , компоненти якого  $\Delta b_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  являють собою випадкові величини з функціями розподілу  $F_i(\tau)$ . Необхідно :

– визначити  $F_{\|\Delta \mathbf{b}\|_1}(\tau)$  у вигляді

$$F_{\|\Delta \mathbf{b}\|_1}(\tau) = P\{\|\Delta \mathbf{b}\|_1 \leq \tau\}.$$

Оскільки  $\Delta b_i$  незалежні, то

$$F_{\|\Delta \mathbf{b}\|_1}(\tau) = P\left\{\max_i |\Delta b_i| \leq \tau\right\} = \prod_{i=1}^n P\left\{|\Delta b_i| \leq \tau\right\} = \prod_{i=1}^n \tilde{F}_i(\tau). \quad (2.44)$$

В (2.44)  $\tilde{F}_i(\tau)$  — функція розподілу  $|\Delta b_i|$ . Тоді

$$\tilde{F}_i(\tau) = \begin{cases} F_i(\tau) - F_i(-\tau), & \tau > 0; \\ 0, & \tau \leq 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Таким чином

$$F_{\|\Delta \mathbf{b}\|_1}(\tau) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n [F_i(\tau) - F_i(-\tau)], & \tau > 0; \\ 0, & \tau \leq 0. \end{cases} \quad (2.46)$$

– визначити  $F_{\|\Delta \mathbf{b}\|_2}(\tau)$  у вигляді

$$F_{\|\Delta \mathbf{b}\|_2}(\tau) = P\left\{\sum_{i=1}^n |\Delta b_i| \leq \tau\right\}.$$

Розглянемо випадкову величину

$$w = \sum_{i=1}^n |\Delta b_i|.$$

З урахуванням викладеного у попередньому пункті, можна записати

$$F_w(\tau) = \underbrace{\int \dots \int}_n \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{d\tau_i} [F_i(\tau_i) - F_i(-\tau_i)] \right\} d\tau_i, \quad (2.47)$$

звідки

$$\sum_{i=1}^n |\Delta b_i| \leq \tau. \quad (2.48)$$

2) Нехай задано  $(n \times n)$ -матрицю  $\Delta \mathbf{A}$ , компоненти якої  $\Delta a_{ij}$ ;  $i, j = \overline{1, n}$  незалежні безперервні випадкові величини з функціями розподілу  $F_{ij}(\tau)$ .

Необхідно:

– визначити  $F_{\|\Delta \mathbf{A}\|_1}(\tau)$  у вигляді

$$F_{\|\Delta \mathbf{A}\|_1}(\tau) = P\{\|\Delta \mathbf{A}\|_1 \leq \tau\}.$$

З визначення першої норми випливає, шуканий закон розподілу можна отримати, застосовуючи по чергово результати попереднього п. 1 відповідно, спочатку, до рядків матриці  $\Delta \mathbf{A}$ , а тоді — до отриманого  $h$ -мірного вектору.

Нехай  $f_i(\tau)$ ,  $i = \overline{1, n}$  — щільність ймовірностей випадкової величини  $\xi_i$ , причому

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (2.49)$$

Враховуючи, що  $\|\Delta \mathbf{b}\|_2$  та  $\|\Delta \mathbf{A}\|_1$  розподілені за нормальним законом, можна записати

$$f_i(\tau) = \begin{cases} \frac{f_{\text{нi}}(\tau)}{\varepsilon_i}, & \tau \in (0, \tau_{\max}); \\ 0, & \tau \notin (0, \tau_{\max}), \end{cases} \quad (2.50)$$

де  $f_{\text{нi}}(\tau)$  — щільність ймовірностей нормального закону розподілу з параметрами математичного очікування  $m_i$  та дисперсії  $D_i$ .

Тоді, на підставі першого підпункту п. 1, можна записати:

$$F_{\|\Delta \mathbf{A}\|_1}(\tau) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n F_i^*(\tau), & \tau > 0; \\ 0, & \tau \leq 0. \end{cases} \quad (2.51)$$

В (2.51)  $F_i^*(\tau)$  — функція розподілу випадкових величин  $\xi_i$ .

— визначити  $F_{\|\Delta \mathbf{A}\|_2}(\tau)$  у вигляді

$$F_{\|\Delta \mathbf{A}\|_2}(\tau) = P\{\|\Delta \mathbf{A}\|_2 \leq \tau\}.$$

По аналогії з попереднім підпунктом можна записати:

$$F_{\|\Delta\mathbf{A}\|_2}(\tau) = \begin{cases} \prod_{j=1}^n F_j^{**}(\tau), & \tau > 0; \\ 0, & \tau \leq 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

де  $F_j^{**}(\tau)$ ,  $j = \overline{1, n}$  – функція розподілу випадкових величин

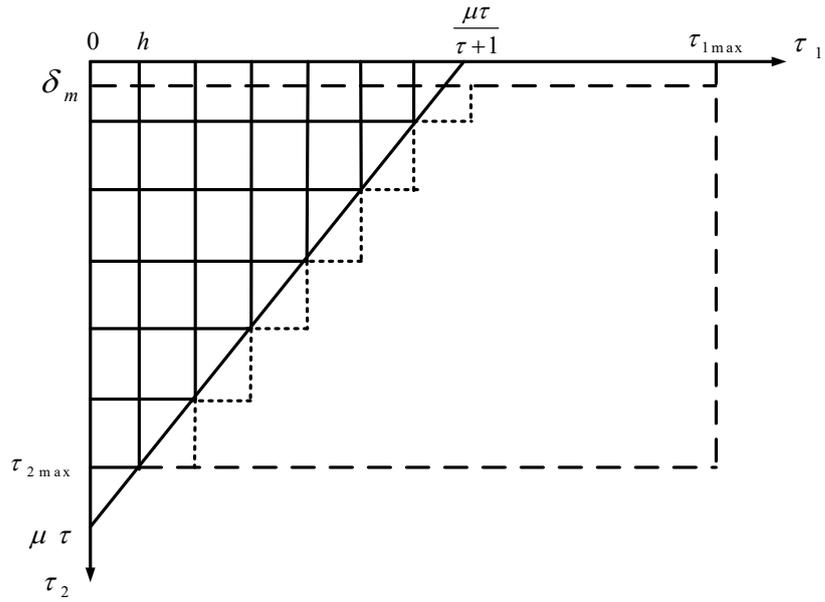
$$\xi_j^* = \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \quad (2.53)$$

Питання щодо визначення границь похибки з ймовірністю не меншою, ніж  $P$  (або, іншими словами, щодо визначення похибки, ймовірність перевищення якої не більше ніж  $(1 - P)$ ), можна вирішувати, виходячи з нерівності Чебишева. Для цього достатньо знати математичне очікування та дисперсію. Однак слід мати на увазі відносно більшу «грубість» нерівності Чебишева і, таким чином, результатів, які можна отримати з нього.

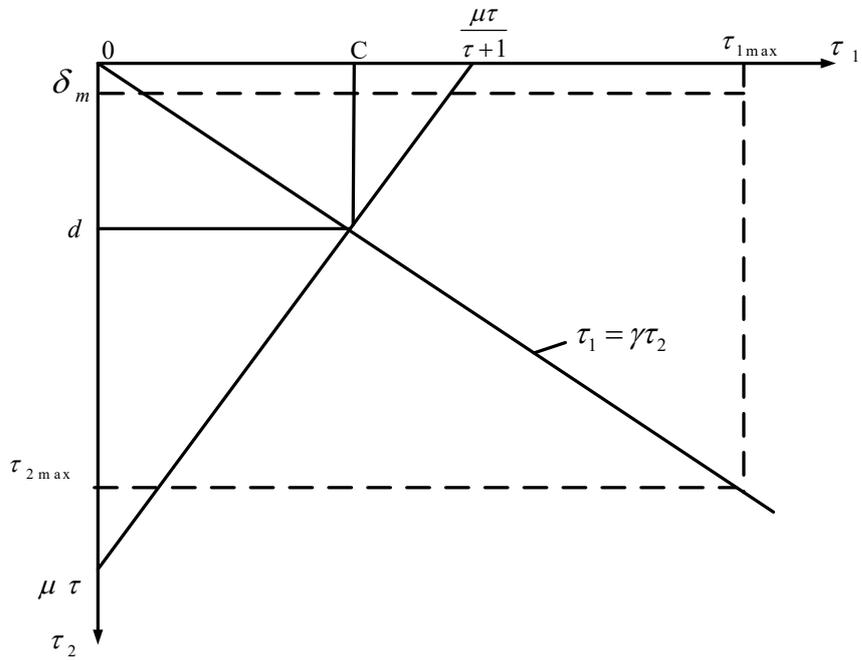
Зазначимо, що отримання  $F_{\|\cdot\|}(\tau)$  в явному вигляді пов'язано з труднощами аналітичного характеру, оскільки члени правих частин виразів (2.46) та (2.52) не можна виразити через елементарні внаслідок «нормальності» випадкових величин (2.49). Вочевидь аналогічні результати можна отримати, якщо норми похибок  $\|\Delta\mathbf{b}\|$  та  $\|\Delta\mathbf{A}\|$  розподілені за законом, відмінним від нормального.

Можна побудувати більш грубу, але таку, що легко обчислюється, нижню границю, шляхом визначення ймовірності потрапляння в прямокутник зі сторонами, паралельними осям координат, і вершинами в точках  $(\tau_{1\min}, \tau_{2\min})$ ,  $(c, \tau_{2\min})$ ,  $(\tau_{1\min}, \alpha)$ ,  $(c, \alpha)$ . За точку  $(c, \alpha)$  доцільно прийняти точку перетину

прямих  $\frac{\tau_1 + \tau_2}{\mu - \tau_1} = \text{const}$  та  $\tau_1 = \gamma\tau_2$ , де  $\gamma = \tau_{1\min}$  (рис. 2.1, а, б).



а)



б)

позначки:

а – графічне визначення розподілу  $F_{\parallel}(\tau)$ ;

б – визначення «грубої» оцінки нижньої границі

Рисунок 2.1. – Побудова нижньої границі оцінки неусувної похибки

При цьому

$$\mu = \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|_1 \|\mathbf{A}\|_1}; \quad c = \frac{\tau \gamma \mu}{1 + \gamma(1 + \tau)}; \quad \alpha = \frac{\tau \mu}{1 + \gamma(1 + \tau)}.$$

При розв'язку СЛАР матриця  $\Delta \mathbf{A}$  та вектор  $\Delta \mathbf{b}$  залежать від способу введення вхідної інформації. Однак, у будь-якому випадку, можна вважати, що матриця  $\Delta \mathbf{A}$  та вектор  $\Delta \mathbf{b}$  співпадають з матрицею та вектором похибок завдання коефіцієнтів відповідних елементів матриці  $\mathbf{A}$ , та вектору  $\mathbf{b}$ .

### 2.3.2 Апостеріорні оцінки законів розподілу неусувної похибки.

Розглянуті у розділі 2.3.1 способи побудови оцінок «знизу» законів розподілу абсолютної та відносної неусувних похибок, які базуються на використанні відповідних гарантованих оцінок, природним чином визначають два типи оцінок:

- *апостеріорні оцінки* – оцінки законів розподілу величини  $(\|\Delta \mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|)$ , причому обчислення яких не потребує знання величини  $\|\mathbf{x}\|$ ;
- *апостеріорні оцінки* – оцінки законів розподілу величини  $\|\Delta \mathbf{x}\|$ , при обчисленні яких необхідно знати  $\|\mathbf{x}\|$ , що, у випадку практичного застосування, призводить до необхідності використання наближеного розв'язку.

Можна стверджувати, що застосування гарантованих оцінок неусувної похибки розв'язування СЛАР з метою побудови «покращених» оцінок  $C_p$  спричиняє *завищеність* гарантованих похибок.

*Апостеріорний аналіз* неусувної похибки розв'язку СЛАР дає змогу побудувати оцінки «знизу» законів розподілу величин  $\|\Delta \mathbf{x}\|$  та  $(\|\Delta \mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|)$  і, таким чином, відповідні оцінки  $C_p$ , причому останні будуть звільнені від «завищеності», згаданої вище.

Досягнути це можна за рахунок використання виразу, який пов'язує вектор похибок  $\Delta \mathbf{x}$  з вектором нев'язок  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\mathbf{A}\Delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.54)$$

Слід також зазначити, що оцінки похибки в нормах, отримані на підставі (2.54), а саме

$$\|\Delta \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}\|, \quad (2.55)$$

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \cdot \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (2.56)$$

є найменш грубими з усіх оцінок у нормах, але ними не можна користуватися, коли невідомі точні значення елементів матриці  $\mathbf{A}$  та вектора правих частин  $\mathbf{b}$  .

В той же час, з метою побудови оцінок «знизу» законів розподілу  $\|\Delta \mathbf{x}\|$  є можливість скористатися виразом (2.56) у ряді випадків. Сформулюємо таку можливість, спираючись на лінійну теорію точності. Наближене рівняння для похибки має такий вигляд:

$$\mathbf{A}\Delta \mathbf{x} \approx \mathbf{b} - \Delta \mathbf{A}. \quad (2.57)$$

З (2.55) та (2.57) випливає

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cong \Delta \mathbf{b} - \Delta \mathbf{A}\mathbf{x} = \boldsymbol{\varepsilon}_d, \quad (2.58)$$

а з (2.56) видно, що для побудови оцінки «знизу» величини  $\|\Delta \mathbf{x}\|$  необхідно знати закон розподілу випадкової величини  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ , який можна приблизно визначити, враховуючи (2.58) при деяких уявленнях відповідно випадкових величин  $\Delta a_{ij}$ ,

$\Delta b_i$ ;  $i, j = \overline{1, n}$ . Нехай ці величини є незалежними випадковими величинами з функціями розподілу  $F_{a_{ij}}(\tau)$ ,  $F_{b_i}(\tau)$ , відповідно. Тоді  $\varepsilon_{L_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$  будуть неперервними незалежними величинами, закон розподілу яких при значних  $n$  можна вважати, в силу центральної граничної теорії ймовірностей [242]–[246], нормальними з параметрами

$$m_i = m(\Delta b_i) - \sum_{j=1}^n [m(\Delta a_{ij}) y_j]; \quad i = \overline{1, n} \quad (2.59)$$

та

$$D_i = \sqrt{D^2(\Delta b_i) + \sum_{j=1}^n [D^2(\Delta a_{ij}) y_j^2]}; \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.60)$$

де  $m(\Delta b_i)$ ,  $m(\Delta a_{ij})$ ,  $D^2(\Delta b_i)$ ,  $D^2(\Delta a_{ij})$  – математичні очікування та дисперсії відповідних величин;

$y_j$ ,  $i = \overline{1, n}$  – наближений розв’язок рівняння (2.12), представленого у вигляді

$$(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}, \quad (2.61)$$

в якому  $\Delta \mathbf{A}$  та  $\Delta \mathbf{b}$  – матриця та вектор похибок.

Функція розподілу випадкової величини  $\|\varepsilon_{L_i}\|_1$  можна представити у вигляді:

$$F_{\|\varepsilon_{L_i}\|_1}(\tau) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n [F_{\varepsilon_i}(\tau) - F_{\varepsilon_i}(-\tau)]; & \tau > 0, \\ 0; & \tau \leq 0, \end{cases} \quad (2.62)$$

де  $F_{\varepsilon_i}(\tau)$  – функція розподілу випадкової величини  $\|\varepsilon_{L_i}\|_1$  з параметрами, що

визначаються виразами (2.59), (2.60).

Функцію розподілу  $F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_n\|_2}(\tau)$  випадкової величини  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_n\|_2$  при значних  $n$  можна вважати наближено нормальною з параметрами

$$m_0 = \sum_{i=1}^n m_{|\varepsilon_i|}; \quad D_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^n D_{|\varepsilon_i|}^2}, \quad (2.63)$$

і такою, що можна представити у вигляді

$$F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_n\|_2}(\tau) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n [F_{\varepsilon_2}(\tau) - F_{\varepsilon_2}(-\tau)] & \tau > 0, \\ 0 & \tau \leq 0. \end{cases} \quad (2.64)$$

Для практичних розрахунків можна також рекомендувати наступний спосіб наближеного визначення функції розподілу  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_n\|$ .

Запишемо (2.54) у вигляді

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} \approx \mathbf{E}_n \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{m}_{\varepsilon_n}, \quad (2.65)$$

де  $\mathbf{E}_n$  – діагональна матриця, відповідні елементи якої визначаються по (2.60);  $\mathbf{m}_{\varepsilon_n}$  – вектор,  $i$ -а компонента якого визначається у відповідності до (2.59);  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  – випадковий вектор, компоненти якого розподілені за нормальним законом з параметрами 0 та 1.

Для  $\|\Delta\mathbf{x}\|$  з (2.65) маємо:

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \left( \|\mathbf{E}_n\| \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\| + \|\mathbf{m}_{\varepsilon_n}\| \right). \quad (2.66)$$

Тоді функція розподілу  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_n\|_1$  запишеться як

$$F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_n\|_1}(\tau) = \begin{cases} [2F_{\varepsilon_1}(\tau) - 1]^n; & \tau > 0, \\ 0; & \tau \leq 0. \end{cases} \quad (2.67)$$

А функція розподілу  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_n\|_2$  визначиться наступним чином:

$$F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_2}(\tau) = (2\pi)^{-n/2} \underbrace{\int \dots \int}_{G_{n,\tau}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (t_i^2)\right] dt_1 \dots dt_n \quad (2.68)$$

і за смислом є ймовірність того, що  $\boldsymbol{\varepsilon}_0 \in G_{n,\tau}$ . Множина  $G_{n,\tau}$  визначається нерівністю  $\sum_{i=1}^n |t_i| \leq \tau$ .

Запропонований спосіб побудови апостеріорних оцінок законів розподілу неусувної похибки розв'язку СЛАР може бути легко розповсюджений на випадок аналізу повної похибки (тобто без обмеження лінійною теорією точності). Дійсно, з точного виразу для вектора нев'язок

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \mathbf{b} - \Delta \mathbf{A} \mathbf{x} - \Delta \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\varepsilon}_n - \Delta \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} \quad (2.69)$$

випливає

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \|\boldsymbol{\varepsilon}_n\| + \|\Delta \mathbf{A}\| \cdot \|\Delta \mathbf{x}\|. \quad (2.70)$$

Таким чином

$$\|\Delta \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}_n\| + \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta \mathbf{A}\| \cdot \|\Delta \mathbf{x}\| \quad (2.71)$$

звідки, якщо  $\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{A}\| \leq 1$  (ця умова більш слабка у порівнянні з умовами лінійної теорії)

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}_l\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{A}\|}. \quad (2.72)$$

Вираз (2.72) може використовуватися для побудови оцінки «знизу» функції розподілу величини  $\|\Delta\mathbf{x}\|$  з урахуванням тієї особливості, що внаслідок залежності випадкових величин  $\|\Delta\mathbf{A}\|$  та  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_l\|$  і, за відсутності спільної функції розподілу їх, замість випадкової величини  $\|\Delta\mathbf{A}\|$  при обчисленнях слід обирати її практично максимальне значення. Іншими словами, будувати оцінку «знизу» функції розподілу величини  $\|\Delta\mathbf{x}\|$  слід за виразом

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}_l\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \tau_{\text{ар}}}. \quad (2.73)$$

де  $\tau_{\text{ар}}$  – корінь рівняння

$$P\{\|\Delta\mathbf{A}\| \leq \tau\} = P_{\text{дос}}, \quad (2.74)$$

а  $P_{\text{дос}}$  – ймовірність практично достовірної події.

Очевидно, що побудова оцінки «знизу» функції розподілу  $\|\Delta\mathbf{x}\|$  на основі виразу (2.73) зводиться до збільшення масштабу незалежної змінної оцінки незалежної змінної оцінки функції розподілу  $\|\Delta\mathbf{x}\|$ , отриманої в рамках лінійної теорії в  $\beta_p = 1 / (1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \tau_{\text{ар}})$  раз.

2.4 Числове дослідження методу побудови оцінки «знизу» функцій розподілу неусувної похибки при розв'язуванні задач моделювання динамічних систем та управління ними

Нехай ММ динамічної системи у матричній формі (у відповідності до виразу (2.12)) має вигляд:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1,116 & 1 & 0,833 \\ 0,7 & 1 & 0,8 & 0,7 \\ 0,6 & 0,8 & 1 & 0,9 \\ 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2,584 \\ 1,850 \\ 2,250 \\ 2,250 \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

Також відомо, що похибки завдання коефіцієнтів незалежно від величин останніх розподілено за нормальним законом з параметрами  $m = 0$  та  $D = 10^{-3}$  в інтервалі  $(\pm 10^{-3})$ , що відповідає точності установки коефіцієнтів  $\Delta = 0,3\%$ . Для ММ (2.75) з урахуванням заданих параметрів  $m$ ,  $D$  та точності  $\Delta$  обчислено відповідні норми:  $\|\mathbf{A}\|_2 = 3,7$ ;  $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = 16,956$ ;  $\|\mathbf{b}\|_2 = 8,934$  та величини:  $\mu = 0,016$ ;  $C = 0,311$ .

Необхідно віднайти оцінку «знизу» функції розподілення  $(\|\Delta \mathbf{x}\|_2) / (\|\mathbf{x}\|_2)$ .

Приймаємо для подальших розмірковувань закон розподілу композиції 4-х однобічних нормальних розподілів, а у відповідності до (2.52) отримуємо

$$F_{\|\Delta \mathbf{x}\|_2}(\tau_1) = \left\{ \frac{A_1}{\sqrt{2\pi} \cdot 1,2D} \int_0^{\tau_1} \exp\left[-\frac{(\tau - 3,2D)^2}{21,44D^2}\right] d\tau \right\}^4; \quad 0 \leq \tau_1 \leq 1,2 \cdot 10^{-3},$$

де  $A_1 = \frac{1}{1 - 0,0039}$ .

Для  $x_1$ :

$$F_{x_1}(\tau_1) = \left\{ \frac{A_1 \|\mathbf{A}\|_2}{\sqrt{2\pi} \cdot 1,2D} \int_0^{\tau_1} \exp \left[ -\frac{\left( \tau - \frac{3,2D}{\|\mathbf{A}\|_2} \right)^2}{21,44D^2 \frac{1}{\|\mathbf{A}\|_2^2}} \right] d\tau \right\}^4 ; 0 \leq \tau_1 \leq 3,24 \cdot 10^{-3}.$$

Аналогічно отримуємо для  $x_2$ :

$$F_{x_2}(\tau_2) = \frac{A_1}{\sqrt{2\pi} \cdot 1,2D} \int_0^{\tau_2} \exp \left[ -\frac{(\tau - 3,2D \cdot C)^2}{21,44D^2 C^2} \right] d\tau ; 1,0 \cdot 10^{-3} \leq \tau_2 \leq 4,73 \cdot 10^{-3}.$$

На рис 2.2 наведено функцію розподілу (для нормального закону)  $F_{x_H}(\tau)$  у відповідності до виразу

$$F_{x_H}(\tau) = F_{x_1}(C) [F_{x_2}(\alpha) - F_{x_2}(\alpha')] + F_{x_1}(C') [F_{x_2}(\alpha'') - F_{x_2}(\alpha)] + F_{x_1}(C'') F_{x_2}(\alpha''),$$

яке враховує ймовірність потрапляння у два додаткових прямокутники з вершинами  $(C', \alpha'')$ ,  $(0, \alpha'')$ ,  $(0, \alpha)$ ,  $(C', \alpha)$ ,  $(C'', \alpha')$ ,  $(C, \alpha'')$ ,  $(C', 0)$ ,  $(C'', 0)$ , причому

$$C' = \frac{2}{3}C, \quad \alpha' = \frac{2}{3}\alpha, \quad C'' = \alpha \left[ \gamma + \frac{1}{3(1+\tau)} \right], \quad \alpha'' = C \left[ \frac{\gamma(3+\tau)}{3\gamma} \right].$$

Точка  $C_r = 0,625$  на рис. 2.2 відповідає гарантованій оцінці (2.40).

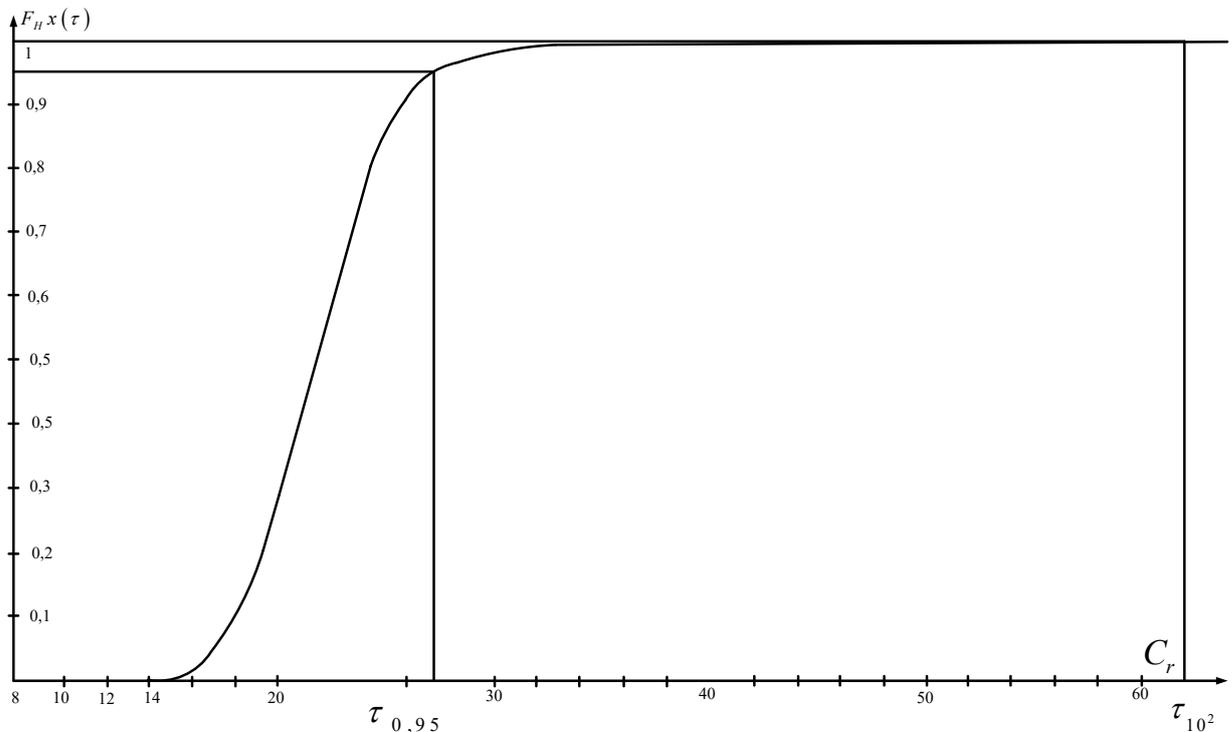


Рисунок 2.2. – Функція розподілу (для нормального закону)  $F_{x_H}(\tau)$

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

Визначено *точність* як один з основних якісних показників обчислювальних засобів (програмно-алгоритмічних та апаратних) при розв’язуванні ними прикладних задач. Показано можливість аналітичної формалізації процедури *ранжирування* (тобто розбиття на класи за точністю) похибок, що виникають на етапі числової реалізації ММ динамічних систем, представлених на основі апаратів диференціальних і інтегральних рівнянь в задачах моделювання та управління зазначених систем. Запропоновано алгоритм ранжирування первинних похибок за точністю, що дає змогу автоматизувати даний процес.

Запропоновано процедуру методу *ранжирування за похибками* при реалізації ММ динамічних систем в задачах моделювання та управління ними. На відміну від застосування відомої теорії чутливості або проведення більш точних обчислень при розв’язуванні задачі (що потребує необхідності більш громіздких

розрахунків, які можна порівняти за обсягом обчислень з розв'язком поставленої задачі або, навіть такі, що перевищують цей обсяг), використання запропонованих аналітичних оцінок у вигляді нерівностей слід розглядати економічним (в смислі трудомісткості обчислень) та достатнім (за абсолютними значеннями) для подальшого аналізу та прийняття рішення щодо оцінки точності отриманого розв'язку.

Ранжирування похибок відбувається у вигляді  $p$ -квartilів (тобто рівновеликих груп значень, впорядкованих від мінімального до максимального, та отриманих із ймовірністю  $p$ ) відповідних функцій розподілу  $\|\epsilon_0\|_i$  ( $i$  – номер квартилю), що дає можливість будувати оцінки границь довірливості для похибок. При ранжируванні похибок враховуються уведені коефіцієнти корекції: 1 роду (що дають *завищені* оцінки та дозволяють побудувати *оцінки зверху* функції розподілу  $\|\Delta x\|_i \geq \|\epsilon_0\|_i / \|\mathbf{A}\|_i$ , де  $\|\mathbf{A}\|_i$  – матриця первинних похибок завдання ММ динамічної системи) та 2 роду (що визначає можливість потрапляння похибки всередину області  $\Omega$  можливих значень елементів  $\epsilon$  – вектора нев'язок, зумовлених числовим розв'язуванням рівнянь, що утворюють ММ динамічної системи).

Запропоновано оцінки «знизу» функцій розподілу неусувної похибки реалізації ММ динамічних об'єктів, представлених диференціальними та інтегральними рівняннями, в задачах моделювання та управління із застосуванням методу ранжирування за похибкою. Побудова даних оцінок ґрунтується на застосуванні гарантованих оцінок для абсолютних та відносних похибок, що виникають при числовій реалізації ММ динамічних систем, зокрема, запропоновано побудову апріорних та апостеріорних оцінок законів розподілу неусувної похибки.

Коректність запропонованого методу ранжирування за точністю підтверджено числовим дослідженням щодо побудови оцінки «знизу» функцій розподілу неусувної похибки при розв'язуванні задач моделювання динамічних систем та управління ними.

### 3 МЕТОДИ КОНТРОЛЮ ДОСТОВІРНОСТІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В ПРОЦЕСАХ ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ

Характерною рисою сучасних систем управління є широке використання різноманітних типів обчислювальних систем, що реалізують методи і алгоритми моделювання та управління. Тому якість функціонування систем моделювання та управління багато в чому визначається характеристиками обчислювальних засобів, що використовуються. Проблема забезпечення якості функціонування, зокрема, управляючих систем з обчислювальною машиною в контурі управління є дуже складною як з технічної, так і математичної точок зору. При вирішенні цієї проблеми практика висунула на одне з перших місць науковий напрямок, пов'язаний із розробкою методів та засобів, що забезпечують надійність процесів обчислень та обробки інформації [97], [247]–[249].

У реальних системах моделювання чи управління процеси обчислень неминуче супроводжуються різного роду завадами та похибками. Так, у разі числового аналізу рівнянь (або інших математичних залежностей) динаміки (що утворюють ММ динамічної системи) на цифровій машині, похибки розв'язування цих рівнянь (або інших залежностей), крім усього, можуть бути спричинені збоями та відмовами в роботі апаратури.

При цьому під *збоями* розуміються [250] спотворення оброблюваної та управляючої інформації під впливом первинних причин, що самоусуваються (неправильне спрацьовування двійкових елементів апаратури, завади, коливання напруги джерел живлення тощо). Причому більшість збоїв мають *випадковий характер*. Тому потрібен дієвий поточний контроль, що дозволяє виявити та усунути похибку до її поширення в контурі управління, що зумовлює *оперативність* як одну з основних характеристик засобів контролю похибок.

Нині використовуються як *програмні* і *апаратурні* методи контролю процесів моделювання (чи управління), так і різноманітні їх поєднання [251]–[253]. Програмні методи контролю, своєю чергою, можна поділити на

*тестові та програмно-логічні* [254]–[256]. Тестовий контроль призначено для перевірки відмов обладнання або програмного забезпечення [257]–[261] у момент, коли не розв’язується робоча задача на обчислювально-управляючому пристрої або допускається подача тестових сигналів у ході розв’язування задачі.

В цьому випадку необхідно контролювати обчислювальний процес у робочому режимі функціонування системи моделювання або управління. І основним об’єктом контролю є збої обладнання. Більш раціональним вважаються програмно-логічні методи контролю, що дозволяють здійснювати контроль у процесі розв’язування задачі. Досить повний огляд існуючих методів програмно-логічного контролю (ПЛК) наведено у низці робіт [262]–[265]. Головним обмеженням застосування існуючих методів контролю числового розв’язування, зокрема, складних нелінійних диференціальних рівнянь (як основного математичного апарату, що описує динамічну поведінку систем) у системах моделювання та управління є час, що відводиться на проведення контролю. Нижче, на прикладі диференціальних рівнянь, запропоновано методи контролю похибок [19], [20], [22]–[24], [27], [32]–[34], [36], викликаних збоями при числовому розв’язуванні цих рівнянь (у термінах теорії управління – рівнянь динаміки) в часі, тобто, у темпі з реалізацією управляючого впливу в контурі управління. При цьому, диференціальні рівняння обрано для подальшого розмірковування у зв’язку з тим, що саме вони переважно використовуються в якості ММ при синтезі управління динамічними системами.

### 3.1 Визначення можливостей контролю алгоритмів числового розв’язування задач обчислювальної реалізації моделей динамічних систем

Числові методи розв’язання рівнянь динаміки (або інших математичних співвідношень, що утворюють ММ динамічних систем) є процедурою *покрокового* отримання шуканої функції. При цьому обчислювальний процес природно розбивається на відносно постійні за часом частини, які відповідають визначенню шуканої функції на певному кроці інтегрування. Крім того

обчислювальний процес розбивається всередині кроку інтегрування також на відносно постійні за часом частини, які відповідають визначенню значень правої частини системи рівнянь, що розв'язується (на прикладі ММ у вигляді диференційного рівняння)

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t), \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0, \quad (3.1)$$

де  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  – вектор змінних стану;

$\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$  – вектор сигналів управління;

$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  – вектор-функція;

$t$  – незалежний параметр часу.

Розглянемо можливості процедур числового розв'язку (3.1) щодо організації контролю (самоконтролю) процесів обчислень. Для організації контролю (самоконтролю) потрібно мати еталонні величини, з якими порівнюються результати обчислень. В якості еталонних величин можуть використовуватися проконтрольовані результати попередніх обчислень або результати, при отриманні яких ймовірність збою мала.

Для будь-яких методів числового розв'язування рівнянь динаміки виду (3.1) контроль збоїв можна організувати шляхом порівняння результатів, отриманих на поточному та наступному кроках інтегрування, відповідно. Наявність чи відсутність збоїв визначається перевіркою умови

$$\xi = \rho(y_i, y_{i+1}) \in D, \quad (3.2)$$

де  $\xi$  – міра близькості значень  $y_i$  та  $y_{i+1}$ ;

$D$  – область допустимих значень цієї міри.

Розміри області  $D$  залежать від зміни рішення від кроку до кроку та визначають точність контролю. Якщо межі області  $D$  відповідають максимально

можливій різниці значень  $y_i$  та  $y_{i+1}$ , на всьому кроці інтегрування за відсутності збоїв, то похибка, яка може бути пропущена при контролі, дорівнює подвоєному значенню розмірів області  $D$ , що впливає з (3.2), оскільки в останній необхідно замінити значення  $y_{i+1}$  на  $y_i$ . При цьому точність контролю може виявитися незадовільною.

Для контролю похибок, викликаних збоями та відмовами, можуть використовуватися методи контролю методичної похибки числового розв'язку на етапі інтегрування або особливості побудови обчислювальних алгоритмів.

У методах прогнозу та корекції [94]–[97], [99], [148], [151], [162], [187], [266]–[269] по різниці  $\xi = |y_f - y_c|$  між прогнозованим  $y_f$  і скорегованим  $y_c$  значеннями шуканої функції можна робити висновки про наявності збою у роботі апаратури. Однак, існуючий взаємозв'язок між значеннями  $y_f$  та  $y_c$  знімає достовірність контролю.

Покажемо це на прикладі вдосконаленого методу Ейлера-Коші [270], [271]. Нехай прогноз здійснюється за формулою:

$$y_{i+1} = y_i + h f_i, \quad (3.3)$$

де  $h$  – крок інтегрування;

$f_i = f(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_i)$ , а корекція здійснюється у відповідності до виразу

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f_i + \tilde{f}_{i+1}), \quad (3.4)$$

де  $\tilde{f}_{i+1} = f(\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{U}, t_{i+1})$ .

Як видно з (3.3) і (3.4), на одному кроці інтегрування двічі обчислюється функція  $f(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_i)$  у точках  $t_i$  та  $t_{i+1}$ . Оскільки цей процес, як правило, займає

основний обсяг обчислювальної роботи, припустимо, що збій стався в момент обчислення  $f(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_i)$  і значення функції  $f_i$  отримано з похибкою  $\Delta f_i$ .

Тоді значення функції, яке може бути отримане у відповідності до формули (3.3), буде

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h(f_i + \Delta f_i) = y_i + h f_i + h \Delta f_i. \quad (3.5)$$

Тут величина  $\Delta y_{i+1} = h \Delta f_i$  – похибка в значенні прогнозу.

Розкладемо функцію  $\tilde{f}_{i+1}$  в ряд Тейлора по  $y$  і, при цьому, обмежимося двома першими членами

$$\tilde{f}_{i+1} = f_i + \frac{\partial f_i}{\partial y} h f_i + \frac{\partial f_i}{\partial t} h.$$

Підставимо в останній вираз для  $\tilde{f}_{i+1}$  значення функції  $f_i$  з похибкою, в результаті чого отримаємо

$$\tilde{f}_{i+1} = f_i + \frac{\partial f_i}{\partial y} h(f_i + \Delta f_i) + \frac{\partial f_i}{\partial t} h.$$

Обчислимо значення функції  $y_{i+1}$  у відповідності до формули (3.4)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left[ (f_i + \Delta f_i) + f_i + \frac{\partial f_i}{\partial y} h(f_i + \Delta f_i) + \frac{\partial f_i}{\partial t} h \right]. \quad (3.6)$$

Різниця між прогнозованим (3.5) та скорегованим (3.6) значеннями буде

дорівнювати

$$\xi = |\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}| = \frac{h}{2} \left| \Delta f_i \left( 1 - \frac{\partial f_i}{\partial y} h \right) - h \left( \frac{\partial f_i}{\partial y} f_i + \frac{\partial f_i}{\partial t} \right) \right|$$

звідки видно, що величина  $\xi$  залежить від величини похідних  $\partial f_i / \partial y$  та  $\partial f_i / \partial t$ . Наявність значної похибки у скоригованому значенні  $\Delta y_{i+1} = h \Delta f_i$  може бути «непоміченим», якщо величини цих похідних малі. Наявність множника  $h/2$  при малих  $h$  знижує «чутливість» величини  $\xi$  до похибок, які викликані збоями при обчисленні  $f_i$ .

Відомі методи прогнозу та корекції (описані, наприклад, в [266]–[269]) можна перетворити (модифікувати) в *ітераційну процедуру*, де число ітерацій визначається точністю співпадіння двох послідовних наближень. При похибці, яку викликано збоєм, число ітерацій може різко зрости, крім того, що більш суттєво, процес може збігатися в точці, яка не має нічого спільного із шуканим розв'язком.

На відміну від модифікованих методів прогнозу та корекції запропонуємо метод *зі зростаючою точністю обчислень*, сутність якого буде полягати у послідовному отриманні значення функції на кроці інтегрування з порядком точності локальної похибки, що збільшується (суть – похибки на кроці інтегрування). Очевидно, що для довільного порядку точності  $r$ , можна записати:

$$y_{i+1}^{(r)} = y_i^{(r)} + \frac{h}{2} [f(y_i^{(r)}, u_i, t_i) + f(y_{i+1}, u_{i+1}, t_{i+1})], \quad (3.7)$$

$$y_{i+1}^{(r-1)} = y_i^{(r)} + h f(y_i^{(r)}, u_i, t_i), \quad (3.8)$$

де верхній індекс вказує на порядок локальної похибки наближеного значення.

Порівнюючи значення  $y_{i+1}^{(r-1)}$  та  $y_{i+1}^{(r)}$  між собою можна зробити висновок щодо локальної похибки розв'язку. Цей самий прийом можна застосувати і для виявлення похибок від збоїв. Таким чином, якщо на попередньому кроці не було збою, то похибка при визначенні  $y_{i+1}^{(r-1)}$  може відбутися тільки за умови реалізації виразу (3.8).

Інакше кажучи, на кожному кроці інтегрування маємо еталонне значення  $y_{i+1}^{(r-1)}$ , достовірність якого визначається ймовірністю збою при обчисленнях за формулою (3.8). І в цьому випадку величина  $\xi = |y_{i+1}^{(r-1)} - y_{i+1}^{(r)}|$  визначається різницею залишкових членів і є малою величиною порядку  $O(h^2)$ . Якщо при визначенні  $y_{i+1}^{(r-1)}$  відбувся збій та отримано значення з похибкою, то при визначенні  $y_{i+1}^{(r)}$  буде використано значення похідної  $\frac{\partial f(y + \Delta y, u, t_{i+1})}{\partial y}$ , що може, в загальному випадку, знизити достовірність контролю, заснованого на порівнянні  $y_{i+1}^{(r)}$  з  $y_{i+1}^{(r-1)}$ .

Враховуючи обсяг обчислень, а, відповідно, і ймовірність збою, для процедури (3.7), (3.8) менше, ніж для інших *однокрокових* методів того ж порядку точності відносно кроку  $h$ , а також той факт, що ймовірність збою при обчисленні  $y_{i+1}^{(r-1)}$  значно менша за ймовірність збою при обчисленні функції  $f(y, u, t)$ , коли остання має складний вигляд, слід признати доцільною (з точки зору контролю збоїв) організацію процесу контролю з використанням метод *зі зростаючою точністю обчислень* другого порядку, тобто:  $(r - 1) = 2$ .

Сформулюємо вимоги, яким повинен відповідати алгоритм, що реалізує метод *зі зростаючою точністю обчислень*, і який забезпечує зручність організації контролю та корекції розв'язку при збоях [33], [34]. Зазначимо, що контроль слід проводити шляхом порівняння значень функції, отриманих з різною точністю у точці (вузлі) інтегрування  $t_{i+1}$ . При цьому перше значення має бути отримано *без похибок*, оскільки воно є *еталонним*. Після порівняння наступного значенням

функції  $f(y, u, t)$  в точці  $t_{i+1}$ , яке підвищується за ступенем точності, з еталонним (тобто з початковим, яке, як зазначено, отримано без похибки), воно само стає еталонним. Далі процедура повторюється.

Очевидно, що описаний процес легко організувати, наприклад, в методі другого порядку точності  $((r-1)=2)$  з використанням виразів (3.7), (3.8). В даному випадку, при обчисленні  $y_{i+1}^{(2)}$  не обчислюється функція  $f(y, u, t)$ , а використовується значення  $f(y_{i+1}^{(2)}, u_{i+1}, t_{i+1})$ , отримане на попередньому кроці інтегрування, що значно зменшує ймовірність появи збою при обчисленні значення  $y_{i+1}^{(2)}$ .

Алгоритм, що реалізує метод *зі зростаючою точністю обчислень* повинен відповідати наступним вимогам:

1) Процес обчислень на кроці інтегрування повинен починатися з визначення функції  $f$  в точці  $t_{i+1}$ . При цьому не обчислюється функція  $f(y, u, t_{i+1})$ , а використовується значення функції  $f$ , отримане та проконтрольоване при обчисленні найбільш точного значення розв'язку системи (3.1) на попередньому кроці інтегрування. Розрахункова формула для отримання першого наближеного значення  $y(t_i + h)$  з локальною похибкою  $O(h^2)$  має вигляд

$$y_{i+1}^{(2)} = y_i^{(r)} + h f(y_i^{(r-1)}, u_i, t_i),$$

де  $r$  – порядок локальної похибки наближеного значення розв'язку;

$f(y_i^{(r-1)}, u_i, t_i)$  – оцінка похідної, яку використано при визначенні  $y_i^{(r)}$ .

Якщо знехтувати умовою однокроковості, та залучати інформацію щодо задачі, яка розв'язується, на відрізку більшим, ніж крок інтегрування  $h$ , можна збільшити порядок точності першого наближеного значення функції  $y(t_i + h)$ . При побудові багатокрокової процедури для отримання першого наближення

функції в точці  $t_{i+1}$  можна застосувати оцінки похідної отриманої  $\frac{\partial f(y + \Delta y, u, t_{i+1})}{\partial y}$ , отриманої всередині кроку  $[t_{i-1}, t_i]$ .

Правильність обчислень за (3.7) здійснюється шляхом перевірки умови

$$\xi \in D, \quad (3.9)$$

де  $\xi = \xi(y_{i+1}^{(2)}, y_{i+1}^{(3)})$  – міра точності обчислень;

$D$  – допустима область значень цієї міри.

В разі невиконання умови (3.9) корекція хибного розв'язку відбувається перерахунком значень  $y_{i+1}^{(3)}$ , або заміною  $y_{i+1}^{(3)}$  на  $y_{i+1}^{(2)}$ . В останньому випадку буде внесено похибку, що визначається різницею залишкових членів у відповідних формулах і є малою величиною порядку  $O(h^2)$ . При цьому час корекції буде випадковою величиною з математичним очікуванням

$$M[T_{\text{кор}}] = (t_{\text{наб}} + t_{\text{оп.к}}) \sum_{m=0}^H C_H^m p^m q^{H-m},$$

де  $t_{\text{наб}}$  – час обчислення чергового наближення функції  $y(t)$  в точці  $t_{i+1}$ ;

$t_{\text{оп.к}}$  – час, який займає операція контролю;

$H = kN$  ( $k$  – число розбиттів щодо отримання розв'язку із зростаючою точністю,  $N$  – число кроків інтегрування);

$p$  – ймовірність збою при обчисленні чергового наближення;  $q = 1 - p$ .

Математичне очікування загального часу розв'язування за  $N$  кроків обчислень складає

$$M[T] = H(t_{\text{наб}} + t_{\text{оп.к}}) + M[T_{\text{кор}}]. \quad (3.10)$$

Якщо корекція здійснюється заміною хибного значення  $y_{i+1}^{(r)}$  на найближче

за точністю значення цієї функції у точці  $t_{i+1}$ , то у розв'язок буде внесено похибку

$$\xi = y_{i+1}^{(l+1)} - y_{i+1}^{(l)} = \eta_{i+1}^{(l+1)} - \eta_{i+1}^{(l)},$$

де  $y_{i+1}^{(l)}$  та  $y_{i+1}^{(l+1)}$  – послідовні наближення функції  $y(t)$  відповідно з порядками локальної похибки  $l$  та  $(l+1)$ ;

$\eta_{i+1}^{(l)}$  та  $\eta_{i+1}^{(l+1)}$  – малі величини відповідно з порядками малості  $h^l$  та  $h^{l+1}$ .

2) Число розбиттів  $k$  (тобто число значень  $y_{i+1}^{(r)}$ , які отримано зі зростаючою точністю на відрізку  $[t_i, t_{i+1}]$ ) можна обрати, мінімізуючи (3.10) при обмеженнях на величину  $\xi = (y_{i+1}^{(l+1)} - y_{i+1}^{(l)})$ , або навпаки, мінімізуючи  $\xi$  при обмеженні на  $M[T]$ . Однак, практично  $t_{\text{наб}} \gg t_{\text{оп.к}}$ , а тому доцільно при синтезі алгоритму методу зі зростаючою точністю обирати максимальне число розбиттів  $k$ , яке можливе для методу обраного порядку точності  $r$ .

Оцінимо головний член похибки, застосовуючи для цього правило Рунге [18], [94], [187], [272], [273]. В даному випадку використання даного правила зводиться до наступного. Для деякої точки  $t$  відрізка  $[t_0, t_N]$  методом  $k$ -го порядку точності послідовно можна отримати наближені значення функції  $y_{h_1}$  та  $y_{h_2}$  на кроках  $h_1 \neq h_2$ , відповідно. Визначимо величину:

$$\xi(t) = \frac{y_{h_1} - y_{h_2}}{h_2^k - h_1^k}.$$

Тоді, з урахуванням величини головного члена похибки для кожного із значень  $h = h_1$  та  $h = h_2$

$$\xi_1 = h_1^k \frac{y_{h_1} - y_{h_2}}{h_2^k - h_1^k} \text{ та } \xi_2 = h_2^k \frac{y_{h_1} - y_{h_2}}{h_2^k - h_1^k},$$

можна зробити висновок щодо точності обчислень.

При рівномірному кроці розбиття відрізка  $[t_0, t_N]$ , тобто, якщо  $h_1 = h$ , а  $h_2 = 2h$ , вираз для головного члена похибки набуде наступного вигляду:

$$\xi = y - y_h \approx \frac{y_h - y_{2h}}{2^k - 1}.$$

В залежності від обчисленої величини  $\xi$ , для отримання заданої точності, крок  $h$  слід або зменшувати, або збільшувати (хоча в останньому випадку досягнута розрахункова точність і буде переважати задану, однак може значно зрости час обчислень, а також може погіршитися збіжність розв'язку).

Похибка, викликана збоєм та така, що перевищує допустиме значення оцінки головного члена похибки  $\xi_{\text{доп}}$ , буде виявлена та усунута шляхом перерахунку із зменшенням кроку  $h$ . Правило Рунге [25] потребує додаткових обчислень, що значно збільшує витрати часу та ймовірність похибок *першого роду* (інакше –  $\alpha$ -похибок, тобто робиться помилково-узгоджуючий висновок про те, що відкидається вірна гіпотеза), а тому застосування даного правила в системах управління проблематично (або, навіть, неприпустимо). Слід також зазначити, що застосування при обчисленнях змінного кроку, тобто  $h \neq \text{const}$ , в управляючих системах ускладнюється також наявністю сигналів управління, які необхідно при зміні кроку  $h$  або попередньо запам'ятати, або використовувати інтерполяційні формули, що вносить додаткову похибку у розв'язок.

Тому, при оцінці похибок обчислень для систем управління, покажемо можливість застосування *квадратурних формул*. Використаємо віднайдені за основним алгоритмом значення  $y_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  із застосуванням наступної квадратурної формули

$$y(t_i) = y_0^* + \int_{t_0}^{t_N} f(y^*, u, t) dt,$$

де  $y^*$  – точне значення функції, і тоді можна отримати

$$\bar{y}_N = y_0^* + \sum_{i=0}^N A_i f(y_i, u_i, t_i), \quad (3.11)$$

де  $A_i$  – постійні коефіцієнти.

Висновок щодо наявності похибки робиться шляхом перевірки умови:

$$\xi = |y_N - \bar{y}_N| \leq \xi_{\text{доп}},$$

де  $\xi_{\text{доп}}$  – допустиме значення величини похибки  $\xi$ .

Слід мати на увазі, що застосування виразу (3.11) при досить великому значенні  $N$  може, в свою чергу, призвести до чималого значення  $\xi_{\text{доп}}$ , і, тим самим, збільшити ймовірність похибок *другого роду* (інакше –  $\beta$ -похибок, тобто робиться помилково-неузгоджуючий висновок про те, що приймається невірна гіпотеза).

Останнє впливає з посилання про те, якщо при збої значення  $y_N$  отримано з похибкою, то з похибкою буде отримано і значення  $\bar{y}_N$ . Тобто будуть порівнюватися дві спотворені збоєм величини, які мають зв'язок через похідні. А цей факт може призвести до зниження якості контролю.

Аналітичне дослідження (Додаток Б) запропонованого методу контролю зі зростаючою точністю обчислень показує, що можливо організувати контроль шляхом розв'язування рівнянь динаміки з метою виявлення похибок, які спричинені збоями та відмовами в роботі засобів ОТ. При цьому основною перевагою запропонованого методу є простота алгоритму та незначний обсяг обчислень. Однак достовірність точного контролю може виявитися незадовільною через *взаємовплив величин*, на підставі порівняння яких робиться висновок щодо наявності похибок в процесі обчислень.

Нижче запропонуємо методи алгоритмічного контролю [27], які може бути застосовано для контролю процесу обчислень при будь-яких методах числового розв'язування рівнянь динаміки. До того ж будемо розглядати контроль, заснований на застосуванні додаткового (перевірочного) алгоритму на кожному кроці числового розв'язування рівняння динаміки.

### 3.2 Екстраполяційний метод контролю

В низці прикладних задач, зокрема при оцінці достовірності отриманого розв'язку, домінуюче значення мають *час прогнозу* (тобто швидкодія у його отриманні) та *простота* задіяних *обчислювальних процедур*. Зокрема, такі вимоги можуть виникати при розв'язуванні задач управління швидкоплинними динамічними процесами (об'єктами), особливо в умовах багатоваріантної постановки (до таких задач може бути віднесено: оптимізаційні задачі з ітераційними процедурами пошуку оптимального закону управління; задачі диспетчерського управління у нештатних та аварійних ситуаціях, коли відшукується найкращий за певним критерієм розв'язок з можливих альтернативних; задачі, які розв'язуються у «прискореному» масштабі часу, коли відшукуються закони програмного управління, за умови відсутності можливості організувати замкнуті системи управління, тощо). В таких випадках, в якості контрольного (*перевірочного*) алгоритму, слід використовувати спрощений

алгоритм розв'язування задачі оцінки достовірності отриманого розв'язку вихідної задачі моделювання або управління.

При цьому може розроблятися як спеціальний контрольний алгоритм, так і застосовуватися більш простий (але і менш точний) метод обчислень. Останнє не обов'язково буде впливати на якість оцінки, оскільки вихідні дані, зазвичай, являють собою результати вимірювань, які, в свою чергу, також отримано з певною похибкою вимірювань (яка складається з методичної та апаратурної складових).

Запропонуємо спрощений метод контролю [27], проблему побудови якого сформулюємо наступним чином: для певного класу задач  $Q$  отримати процедуру та алгоритм розв'язування  $A_k$ , результат виконання яких  $Y$ , у застосуванні до розв'язування задачі  $q \in Q$  співпадає з точністю до  $\varepsilon$  з результатом, отриманим по основному алгоритму  $A_b$ . При цьому витрати часу та обчислювальні витрати (зокрема, машинної пам'яті) на реалізацію алгоритму  $A_k$  мають перебувати у заданих межах.

При обчисленні по основному алгоритму  $A_b$  для класу задач  $Q$  моделювання динаміки (або управління) динамічними об'єктами більша частина часу витрачається на обчислення правої частини системи (3.1). Час обчислення за алгоритмом  $A_k$  можна значно скоротити у порівнянні з алгоритмом  $A_b$ , якщо в ньому використовувати значення функції  $f(Y, U, t)$ , отримані по алгоритму  $A_b$ . Оскільки обчислювальний процес за алгоритмом  $A_b$  також наражається на збої, то відмова від обчислювання функції  $f(Y, U, t)$  значно зменшить ймовірність похибок першого роду –  $\alpha$ -похибок. В даному випадку можна досягнути підвищення достовірності контролю на кроці обчислювального процесу, який контролюється, якщо у контрольній процедурі (контрольному алгоритмі) використовувати інформацію, яку вже проконтрольовано на попередніх кроках, тобто використати для контролю ідею *екстраполяції*. Тоді контроль кожної компоненти векторного рівняння (3.1) за допомогою екстраполяційного методу

може здійснюватися окремо, тому побудова контрольної процедури методу (і відповідного алгоритму) будемо розглядати для певної компоненти  $y$  вектора  $\mathbf{Y}$   $i$ , при цьому, не втрачати загальності викладення.

Враховуючи сказане вище, контрольне значення функції на  $(i + 1)$ -му кроці інтегрування, який контролюється, може визначатися за формулою

$$\bar{y}_{i+1} = \sum_{p=0}^{p_1} a_p y_{p-1} + h \sum_{s=1}^{s_1} b_s f(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_{i-s}), \quad (3.12)$$

де  $h = t_{i+1} - t_i$  – крок інтегрування;

$a_p, b_s$  — коефіцієнти.

У (3.12) використовуються тільки значення функції та її похідних, які проконтрольовано на попередніх кроках інтегрування. Верхні межі сум  $p_1$  та  $s_1$  обираються з умови потрібного порядку точності алгоритму, який контролюється. Коефіцієнти  $a_p, b_s$  доцільно обирати, виходячи з умови мінімальної локальної похибки (тобто рівності нулю залишкового члена  $r_i = 0$  між точним розв'язком та числовим розв'язком (3.12)).

Відомо, що у багатьох методах (і відповідних їм алгоритмах) розв'язку рівнянь динаміки (насамперед це стосується випадків, коли динамічні процеси описуються диференціальними рівняннями) визначаються оцінки складових результату для поточних кроків числового розв'язку (у зазначених випадках диференціальних рівнянь – це похідних між вузлами інтегрування). Оскільки ці оцінки дають проконтрольовану на попередньому кроці інформацію щодо поведінки розв'язку в точці, яку розташовано ближче до контрольованого значення функції, ніж значення  $f(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_{i-s})$  в (3.12) при  $s_1 = 1$ , то при екстраполяції доцільно врахувати цю інформацію. Якщо при екстраполяції врахувати одну оцінку вказаних складових розв'язку (наприклад, похідної для диференціальних рівнянь динаміки), отриману за основним алгоритмом, то у

виразі (3.12) додається один доданок:

$$\bar{y}_{i+1} = \sum_{p=0}^{p_1} a_p y_{p-1} + h \left[ \sum_{s=1}^{s_1} b_s f(\mathbf{Y}, U, t_{i-s}) + b_0 f(\mathbf{Y}, U, t_{i+1}) \right], \quad (3.13)$$

де  $f(\mathbf{Y}, U, t_{i+l})$  – оцінка складової (наприклад, похідної),  $b_0$  – коефіцієнт.

Очевидно, що у загальному випадку, для екстраполяції може бути врахована будь-яка інформація щодо розв'язку, отримана за основним алгоритмом  $A_b$ , та проконтрольована на попередніх кроках числової процедури. Так, в числовій процедурі методу «прогноз-корекція» слід зробити оцінку складових розв'язку в точці  $t_{i+1}$ , яка може бути використана при побудові перевіркової формули для контролю розв'язку на наступних кроках.

В такому разі перевірна (контрольна) формула буде мати вигляд:

$$\bar{y}_{i+1} = \sum_{p=0}^{p_1} a_p y_{p-1} + h \left[ \sum_{s=1}^{s_1} b_s f(\mathbf{Y}, U, t_{i-s}) + b_0 f(\tilde{\mathbf{Y}}, U, t_i) \right]. \quad (3.14)$$

Значення  $f(\tilde{\mathbf{Y}}, U, t_i)$ , яке використовується у контрольній формулі, являє собою оцінку складової розв'язку на поточному кроці числової процедури, отриману за основним алгоритмом  $A_b$  на попередньому кроці. Якщо в методі «прогноз-корекція» застосовується ітераційний процес, то в контрольній формулі використовується оцінка похідної, отримана на останній ітерації для попереднього кроку.

Розглянемо отримання коефіцієнтів  $a_p$  та  $b_s$  для контрольної формули (3.13). Оскільки контрольна формула (3.13) являє собою по суті багатокроковий екстраполяційний метод розв'язування крайової задачі, то точний розв'язок

$y = y(t)$  за умови, що на попередніх кроках обчислень отримано також «точний» розв'язок, буде визначатися наступним чином:

$$y(t_{i+1}) = \sum_{p=0}^{p_1} a_p y(t_{i-p}) + h \sum_{s=1}^{s_1} b_s f[Y(t_{i-s}), u_{i-s}, t_{i-s}] + hb_0 f[Y(t_{i-1}), u_{i-1}, t_{i-1}] + r_i, \quad (3.15)$$

де  $r_i$  – залишковий член.

Вибором коефіцієнтів  $a_p$ ,  $p = \overline{0, p_1}$  та  $b_s$ ,  $s = \overline{1, s_1}$  слід досягнути малості величини  $r_i$ , причому, для простоти вибору можна припустити, що  $r_i \rightarrow 0$  (або, навіть  $r_i \equiv 0$ , якщо розв'язок  $y = y(t)$  може являти собою алгебраїчний багаточлен високого ступеня). Тоді, задавшись початковими значеннями  $a_0$ ,  $b_0$ ,

$b_1$ , визначає перше наближення для формули (3.15) та перевіряється умова

$$y(t) = y(t_{i+1}) + r_i \Big|_{r_i \rightarrow 0} \quad (3.16)$$

і, якщо (3.16) не виконується, тоді послідовним перебором значень коефіцієнтів  $a_p$ ,  $p = \overline{1, p_1}$  та  $b_s$ ,  $s = \overline{2, s_1}$  досягається зазначена вище умова (для спрощення перебору спочатку варіюється коефіцієнт  $a_p$ , тобто  $a_p = \text{var} \Big|_{p=\overline{1, p_1}}$ ,  $b_s = \text{const}$ , а, в разі невиконання (3.15), здійснюється подальший перебір при значеннях  $a_{p_1} = \text{const}$ ,  $b_s = \text{var} \Big|_{s=\overline{2, s_1}}$ . В результаті обираються ті значення  $a_p$  та  $b_s$ , які забезпечують найменшу величину  $r_i$ ).

Якщо розв'язок рівняння (3.1) являє собою багаточлен степеня  $q$ , то для отримання «точного» розв'язку за допомогою виразу (3.15) необхідно підібрати

коефіцієнти  $a_p$ ,  $p = \overline{0, p_1}$  та  $b_0$ ;  $b_s$ ,  $s = \overline{1, s_1}$  так, щоб  $r_i \equiv 0$ , коли  $y(t) = 1, t, \dots, t^q$ .

З цією метою необхідно розв'язати систему алгебраїчних рівнянь:

$$(t_i + h)^m = \sum_{p=0}^{p_1} a_p (t_i - ph)^m + h \left\{ \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^{s_1} b_s (t_i - sh)^m + b_0 (t_i - lh)^m \right] \right\},$$

$$m = \overline{0, q}. \quad (3.17)$$

Умову  $s = l$  уведено для того, щоб при  $s = l$  двічі не повторювався один і той же доданок.

Після перенесення початку відріку у точку  $t_i$  та ділення обох частин (3.17) на  $h^m$ , отримуємо:

$$1 = \sum_{p=0}^{p_1} a_p (-p)^m + m \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^{s_1} b_s (-s)^{m-1} + b_0 (l)^{m-1} \right], \quad m = \overline{0, q}. \quad (3.18)$$

Величина  $l$  за умови (3.15) змінюється для різноманітних числових методів на відріжку  $0 \leq l \leq 1$  в залежності від того, яка оцінка складових розв'язку (3.1), отримана по основному алгоритму  $A_0$ , може використовуватися у контрольному алгоритмі  $A_k$ . Якщо в якості алгоритму  $A_0$  взято, наприклад, екстраполяційний метод Адамса, то  $l = 0$  і вираз (3.18) переходить у (3.15).

В якості прикладу наведемо контрольну формулу, орієнтовану на контроль результатів, отриманих за алгоритмом (3.14), якщо дискретизація вузлових точок виконується за виразом  $t_{i+1} = t_i + \lambda h$ , де  $\lambda = 2/3$ :

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h y_{i-1+\lambda}. \quad (3.19)$$

Для матричного рівняння (3.1)  $n$ -го порядку формула (3.13) набуває вигляду:

$$\bar{y}_{i+1} = \sum_{p=0}^{p_1} a_{j,p} y_{j,p-1} + h \left[ \sum_{s=1}^{s_1} b_{j,s} f_j(\mathbf{Y}, U, t_{i-s}) + b_{j,0} f_j(\mathbf{Y}, U, t_{i+1}) \right], \quad j = \overline{1, n}.$$

В дисертаційній роботі проведено числовий експеримент щодо визначення якісних характеристик запропонованого екстраполяційного методу контролю.

Для прикладної задачі дослідження динаміки польоту літака на рис. 3.1 та рис. 3.2 відповідно показано залежність математичного очікування та середнього квадратичного відхилення величини

$$\xi = \sum_{j=1}^n \frac{|y_{j,i} - \bar{y}_{j,i}|}{\max_t |y_j|}, \quad j = \overline{1, 6}$$

від кроку  $h$  при числовому розв'язуванні рівняння (3.1). Криві на рисунках отримано при використанні для контролю виразу (3.19) з різними значеннями параметру  $\lambda$ .

### 3.3 Інтерполяційний метод контролю

При використанні для контролю екстраполяційного методу контролю є можливість виконувати корекцію розв'язку при похибках не повторними обчисленнями, а заміною  $y_{i+1}$  на  $\bar{y}_{i+1}$ , що є суттєвим при моделюванні та управлінні в реальному (або прискореному) масштабі часу. Однак точність контролю в даному випадку залежить від точності екстраполяції розв'язку за допомогою формули (3.13) і може виявитися незадовільною.

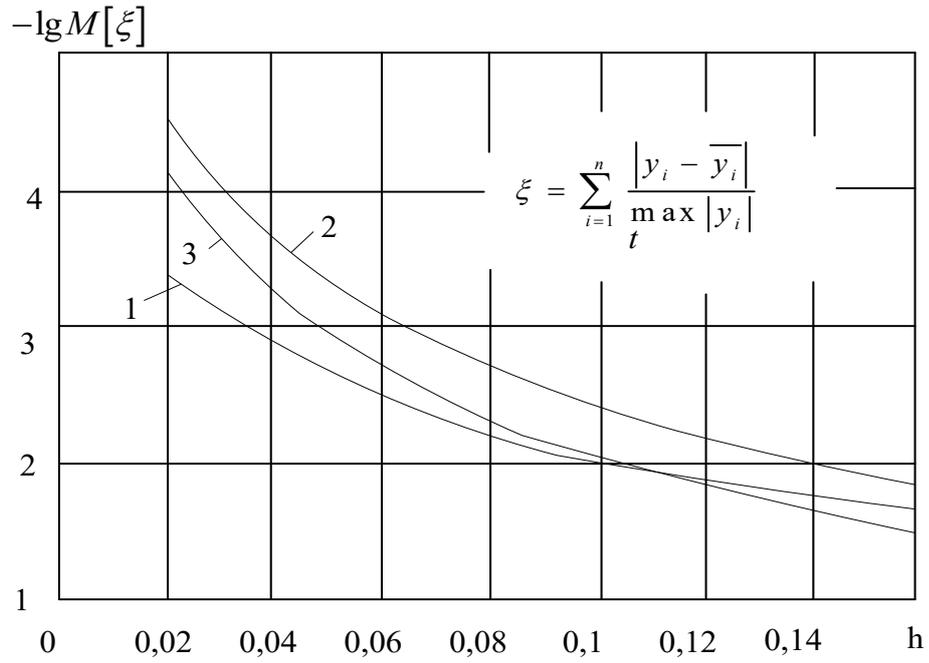


Рисунок 3.1. – Залежність математичного очікування  $M[\xi]$  величини  $\xi$  від кроку  $h$

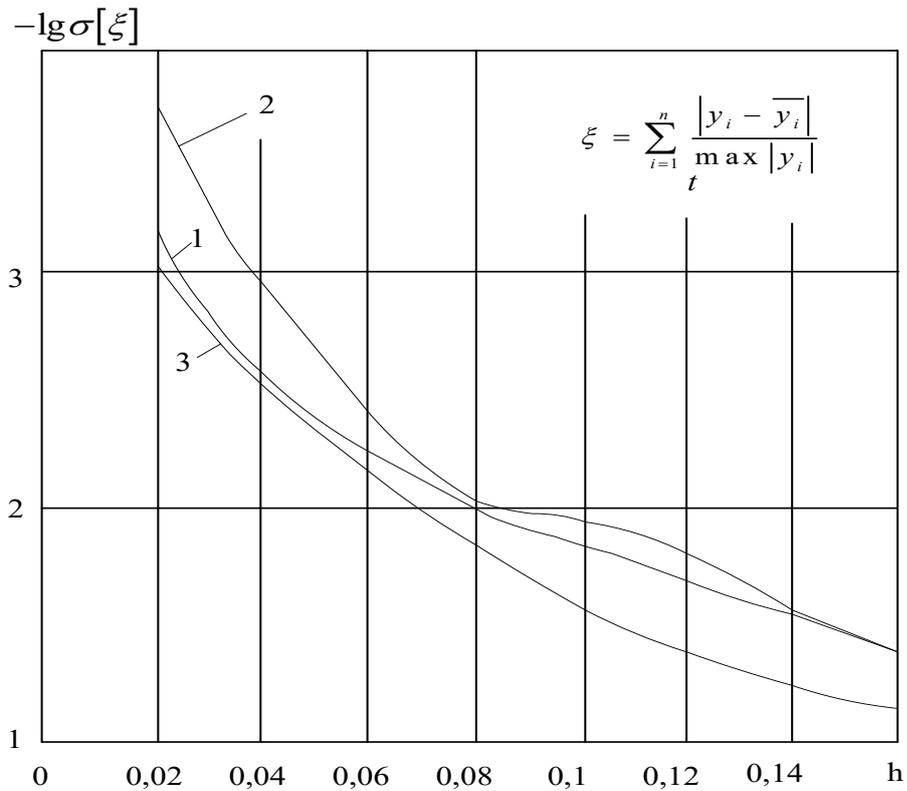


Рисунок 3.2. – Залежність середнього квадратичного відхилення  $\sigma[\xi]$  величини  $\xi$  від кроку  $h$

З цієї причини, з точки зору підвищення точності контролю, більшу перевагу, у порівнянні з екстраполяційним методом, слід вважати метод, заснований на ідеї *інтерполяції* [27]. Зазначимо, що в інтерполяційних формулах контролю, на відміну від екстраполяційних, враховується *зміна розв'язку на кроці обчислень, який контролюється*, що веде до зменшення різниці між величинами  $y$  та  $\bar{y}$ , які є результатом застосування алгоритмів  $A_0$  та  $A_k$ , відповідно. Підвищення точності інтерполяції можна отримати, залучаючи результати обчислень за основним алгоритмом  $A_b$  до кроку обчислень, який контролюється. Для підвищення *чутливості контролю* над похибками, які викликаються збоями, слід за допомогою контрольної інтерполяційної формули визначати значення функції, отримане на кроці обчислень, яке найближче до кроку обчислень, що контролюється.

З урахуванням наведеного вище, запропонуємо контрольну багатокрокову інтерполяційну формулу, за допомогою якої можна здійснювати контроль процесу обчислень на  $(i + 1)$ -му кроці:

$$\bar{y}_i = \sum_{p=-1}^{p_1} a_p y_{i-p} + h \sum_{s=-1}^{s_1} b_s f(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_{i-s}), \quad (3.20)$$

де  $a_p$  та  $b_s$  – дійсні коефіцієнти;

$p \neq 0$  (це вироджений випадок, при якому  $a_0 = 1$ , а всі інші коефіцієнти дорівнюють нулю, причому виконується тотожність  $\bar{y}_i \equiv y_i$ ).

Як і у випадку екстраполяційної формули (3.13) в (3.20) верхні границі підсумовування необхідно обирати у залежності від необхідного порядку точності контролю, а коефіцієнти  $a_p$  та  $b_s$  – з умови точності представлення поліномів відповідного ступеня.

Таким чином, вираз (3.20) визначає процедуру *інтерполяційного методу* контролю обчислень [27].

Принципова відмінність інтерполяційного виразу (3.20) від екстраполяційного виразу (3.13) як контрольних алгоритмів полягає в наступному. У разі екстраполяційних формул безпосередньо контрольованою величиною є значення функції, отримане за основним алгоритмом  $A_b$  на контрольованому кроці обчислень, а контрольне значення є результатом застосування виразу (3.13). У разі інтерполяційних формул контролю величина  $\bar{y}_i$  обчислюється за виразом (3.20), а еталонним є значення функції, отримане за основним алгоритмом  $A_b$  на попередньому  $(i - p)$ -ому кроці обчислення, тобто здійснюється по суті *непрямий* контроль. Похибка обчислення значення  $\bar{y}_{i+1}$  за основним алгоритмом  $A_b$  трансформується у похибку  $\Delta\bar{y}_i$  визначення  $\bar{y}_i$  за формулою (3.20). Відхилення у  $\Delta\bar{y}_i$  в цьому випадку, в рамках лінійної теорії точності, буде визначатися як

$$\Delta\bar{y}_i = L\eta,$$

де  $L = \partial\bar{y}_i / \partial y_{i+1}$ .

У застосуванні до виразу (3.20)  $L$  визначається за формулою

$$L = a_* - b_* h \frac{\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t_{i+1})}{\partial y_{i+1}},$$

де  $a_*$  та  $b_*$  – коефіцієнти, при  $y_{i+1}$  в (3.20).

На рис. 3.3 та рис. 3.4 показано залежності математичного очікування та середнього квадратичного відхилення величини

$$\xi_i = \left\{ \sum_{j=1}^p \left[ \frac{(y_{i,j} - \bar{y}_{i,j})}{\left( \max_i |y_j| \right)} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

від кроку дискретності  $h$  у рівнянні (3.1), що для прикладу, як і у розділі 3.2, описує динаміку польоту літака. Криві 1 і 2 отримано при використанні відповідно інтерполяційних формул 1-го і 2-го порядків на  $(i+1)$ -ому кроці обчислень за основним алгоритмом  $A_b$ :

$$y_i = y_{i+1} - h\dot{y}_{i+1},$$

$$\bar{y}_i = y_{i+1} - 0,5[h(\dot{y}_{i+1} + \dot{y}_i)].$$

Для порівняння наведено криву 3, відповідну застосуванню для контролю екстраполяційної формули

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h(2,25\dot{y}_{i-1} - 1,25\dot{y}_{i-2}).$$

Можна бачити, що зі збільшенням кроку дискретності  $h$  точність інтерполяційного методу контролю, порівняно з екстраполяційним методом, збільшується.

Інтерполяційний метод контролю дозволяє підвищити точність одержання еталонних величин. Однак, у випадку організації контролю обчислювального процесу слід мати на увазі, що при використанні інтерполяційного методу контролю можливість заміни хибного значення, отриманого за основним алгоритмом  $A_b$ , на значення, отримане за контрольним алгоритмом  $A_k$  (що можливо за екстраполяційним методом), відсутня.

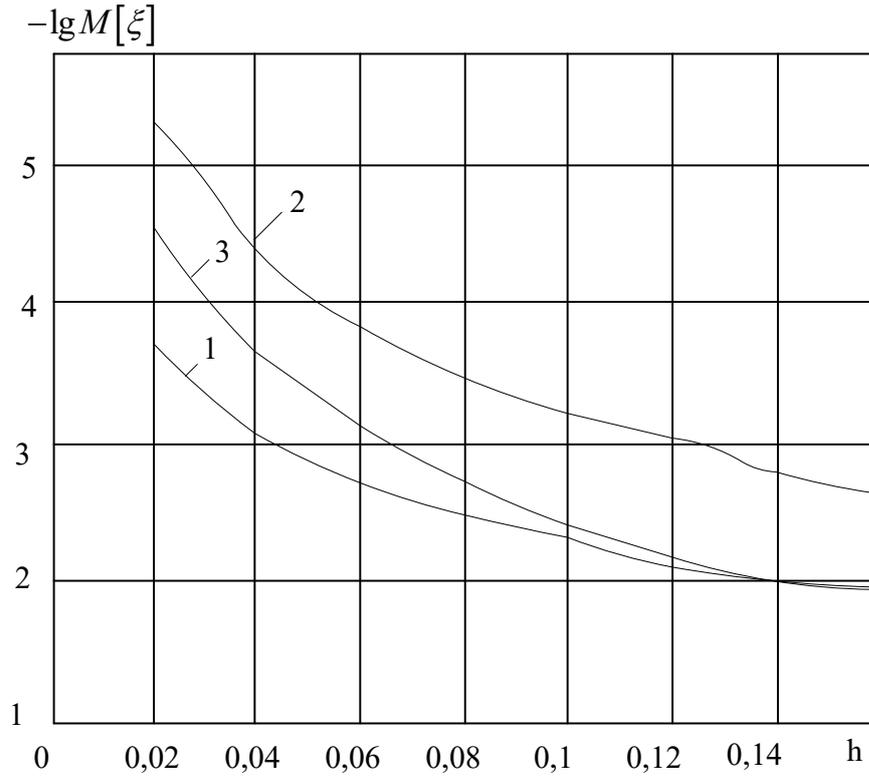


Рисунок 3.3. – Залежність математичного очікування  $M[\xi]$  величини  $\xi$  від кроку  $h$

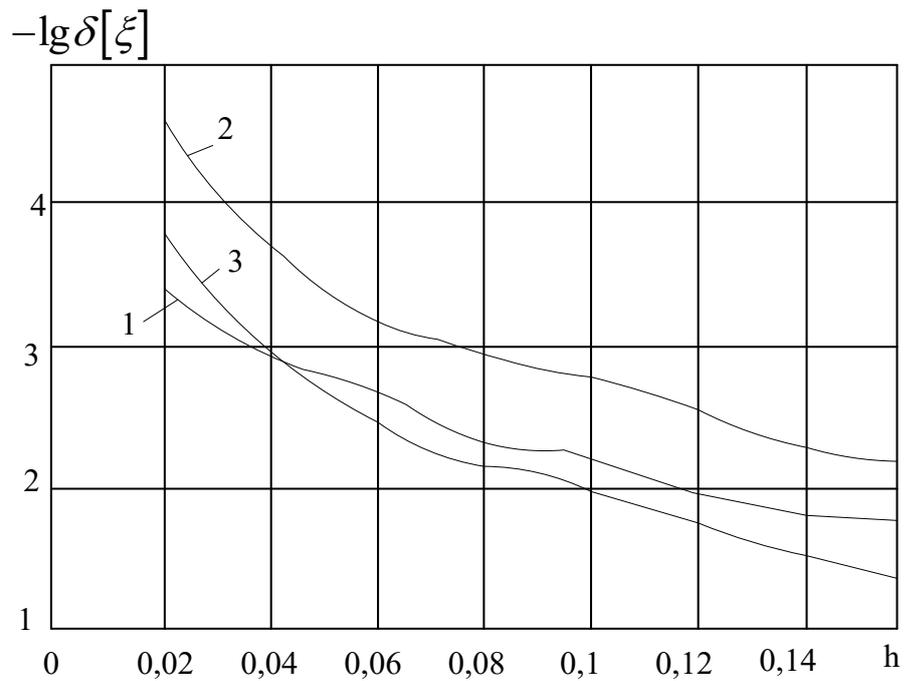


Рисунок 3.4. – Залежність середнього квадратичного відхилення  $\sigma[\xi]$  величини  $\xi$  від кроку  $h$

### 3.4 Адаптивний метод контролю

Коефіцієнти контрольних алгоритмів виду (3.13) та (3.20) визначаються з умови отримання точного результату за контрольним алгоритмом  $A_k$  для розв'язку  $y_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , який являє собою багаточлен якомога більшого ступеня. Такий вибір коефіцієнтів  $a_p$  та  $b_s$  дозволяє отримати заданий порядок похибки контролю при відносно невеликому обсязі обчислень за контрольним алгоритмом  $A_k$  в процесі підрахунку. Фактично точність контролю, що визначається залишком ряду Тейлора для контрольних формул, коливається від кроку до кроку, залежно від гладкості розв'язку  $y_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Запропонуємо метод організації контролю розв'язування системи рівнянь (3.1) за допомогою контрольного алгоритму  $A_k$ , що перебудовується залежно від поведінки контрольованого розв'язку  $y_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$  [36]. Особливість даного підходу полягає в тому, що проконтрольовані на черговому кроці результати використовуються для визначення параметрів контрольного алгоритму  $A_k$ . При цьому параметри визначаються з умови мінімуму певної міри близькості результатів, отриманих за контрольним  $A_k$  та основним  $A_b$  алгоритмами на ділянці розв'язку, що включає останній проконтрольований крок обчислень. Отриманий алгоритм, що позначимо як  $A_a$ , використовується для контролю наступного кроку обчислень. Після цього параметри знову уточнюються.

Очевидно, що описану процедуру методу та реалізуючий її алгоритм  $A_a$ , зважаючи на вищесказане, можна вважати *адаптивними* [36].

Розглянутий нижче метод допускає наступне трактування: на основі проконтрольованої інформації про фізичний процес (тобто динаміки останнього, що описується системою (3.1), і припущення, що поведінка розв'язку  $y_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$  від кроку до кроку змінюється достатньо повільно) розв'язується задача *параметричної ідентифікації* при заданій структурі математичного опис процесу

(тобто системи (3.1)). Отримана модель, в даному випадку контрольна формула у вигляді алгоритму  $A_a$ , використовується для наступного контролю. Інакше, у міру надходження проконтрольованої інформації модель, яка використовується для контролю (алгоритм), уточнюється (або адаптується). Надалі, визначення параметрів контрольного алгоритму, в якості якого розглядається вже алгоритм  $A_a$ , будемо використовувати методи параметричної ідентифікації безінерційних об'єктів [273], [274].

Застосовуючи результати обчислень за основним алгоритмом  $A_b$ , отримані до  $(i+1)$ -ого кроку обчислень, можна визначити параметри контрольного алгоритму  $A_a$  на  $(i+1)$ -му кроці із системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{CQ} = \mathbf{V}. \quad (3.21)$$

Для екстраполяційного способу контролю, що використовують оцінку розв'язку в точці  $t_{i-1+\alpha}$ , величини, що входять у вираз (3.21), визначаються на  $(i+1)$ -му кроці обчислювальної процедури наступним чином:

$$\mathbf{Q} = (a_{-1}, a_1, \dots, a_{p_1}, \dots, b_0, b_1, \dots, b_{s_1})^T,$$

$$\mathbf{V} = (y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1})^T,$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} y_{i-1} \cdots y_{i-p_1-1} \dot{y}_{i-2+\alpha} \dot{y}_{i-2} \cdots \dot{y}_{i-s_1-1} \\ y_{i-2} \cdots y_{i-p_1-2} \dot{y}_{i-3+\alpha} \dot{y}_{i-3} \cdots \dot{y}_{i-s_1-2} \\ \cdots \quad \cdots \\ y_{i-k} \cdots y_{i-p_1-k} \dot{y}_{i-k-1+\alpha} \dot{y}_{i-k-1} \cdots \dot{y}_{i-s_1-k} \end{bmatrix},$$

а для інтерполяційного методу контролю, відповідно:

$$\mathbf{Q} = (a_{-1}, a_1, \dots, a_{p_1}, \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_{s-1_1})^T,$$

$$\mathbf{V} = (y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-k})^T,$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} y_i & y_{i-2} & \dots & \dot{y}_{i-p_1-1} & \dot{y}_i & \dot{y}_{i-1} & \dots & \dot{y}_{i-s_1-1} \\ y_{i-1} & y_{i-3} & \dots & \dot{y}_{i-p_1-2} & \dot{y}_{i-1} & \dot{y}_{i-2} & \dots & \dot{y}_{i-s_1-2} \\ \dots & \dots \\ y_{i-k+1} & y_{i-k-1} & \dots & \dot{y}_{i-p_1-k} & \dot{y}_{i-k+1} & \dot{y}_{i-k} & \dots & \dot{y}_{i-s_1-k} \end{bmatrix}.$$

Якщо матриця  $\mathbf{C}$  не вироджена, і число її рядків дорівнює розмірності вектора параметрів (для екстраполяційного методу  $\mathbf{P}_{\text{ers}} = (a_{-1}, a_1, a_2, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_s)$  та інтерполяційного методу  $\mathbf{P}_{\text{int}} = (a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, \dots, b_s)$ , відповідно), що визначається значенням  $k$ , то оцінкою  $\hat{\mathbf{Q}}$  матриці параметрів  $\mathbf{Q}$  (як для екстраполяційного, так і для інтерполяційного методів) є розв'язок системи алгебраїчних рівнянь

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{V}$$

і результати, отримані за основним алгоритмом  $A_b$  та контрольним алгоритмом  $A_a$  на послідовності  $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}$  співпадають. Якщо матриця  $\mathbf{C}$  прямокутна, то для визначення оцінки вектора параметрів можна скористатися методом найменших квадратів [275], [276].

Розглянемо два варіанти побудови конструктивних алгоритмів адаптивного методу контролю точності обчислень при розв'язуванні задач моделювання та управління динамічними системами.

Нехай, для конкретності викладення, але не порушуючи його загальності, розглядається розв'язування задачі виду (1.29) для рівняння Вольтери другого роду, якщо останнє записано у еквівалентній формі:

$$y(t) + \int_{t_0}^t \frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)} y(s) ds = \frac{f'(t)}{K(t,t)}. \quad (3.21)$$

Прийmemo, що можна відшукати резольвенту  $R_p(t,s)$  ядра  $K(t,s)$  рівняння (3.21). Як зазначалося у розділі 1.2, при числовому розв'язуванні рівняння (3.21) можна використати метод квадратурних формул, що у підсумку дає змогу записати розв'язок наступним чином:

$$y_1 = \frac{1}{K_{1,1}} \left[ \frac{f_1}{h_1} - \frac{1}{2} K_{1,0} y_0 \right],$$

...

$$y_i = \frac{2}{K_{i,i}} \left[ \frac{f_i}{h_i} - \frac{h_1}{2h_0} K_{i,0} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{h_j + h_{j-1}}{h_i} K_{ij} y_j \right) \right], \quad (3.22)$$

де  $t_1 = t_0 + h_1, t_2 = t_1 + h_2, \dots, t_n = T$ , а кроки дискретизації  $h_i$  визначаються як  $h_i = t_i - t_{i-1}, i = \overline{0, n-1}$ .

Після виконаної постановки задачі із записом рівняння динаміки (наприклад, у формі (3.21), (3.22)), перший алгоритм виглядає наступним чином.

**Алгоритм  $A_{ak}^1$ .**

1) Зведення розв'язку вихідної задачі (3.21), (3.22) до виду

$$\begin{aligned} k_1 &= h_i f(y_i, u_i, t_i), \\ k_2 &= h_i f[y_i + \beta k_1, u(t_i + \alpha h), t_i + \alpha h_i], \\ y_{i+1} &= y_i + \sum_{r=1}^i \gamma_r k_r; i = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

де  $\alpha, \beta, \gamma$  – параметри алгоритму.

2) Визначення контрольного значення функції по екстраполяційній формулі (3.13) першого порядку точності:

$$\bar{y}_{i+1} = ay_i - h_i b \dot{y}_{i-1+\alpha}; \quad i = \overline{0, n-1} \quad (3.24)$$

де  $\dot{y}_{i-1+\alpha} = f[y_i + \beta k_1, u(t_i + \alpha h_i), t_i + \alpha h_i]$  – значення оцінки прирощення, отримане за алгоритмом  $A_b$  на  $i$ -му кроці обчислень.

На першому кроці обчислень коефіцієнти  $a, b$  визначаються з умови отримання точного результату за контрольним алгоритмом  $A_k$  для багаточлена першого степеня точності.

3) Визначення величини

$$\xi = |y_{i+1} - \bar{y}_{i+1}|.$$

4) Перевірка умови

$$\xi \leq \xi_{\text{sup}}, \quad (3.24)$$

де  $\xi_{\text{sup}}$  – допустиме значення  $\xi$ .

Якщо умова (3.24) не виконується, то виконати корегування розв'язку (наприклад, заміною  $y_{i+1}$  на  $\bar{y}_{i+1}$ ). Якщо  $t < (t_n = T)$ , то перейти до п. 5, інакше здійснити завершення процесу обчислень.

5) Сформувати матрицю

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} y_{i+1} & \dot{y}_{i-2+\alpha} \\ \dots & \dots \dots \\ y_{i-k} & \dot{y}_{i-k-1+\alpha} \end{bmatrix},$$

де  $\dot{y}_{i-k-1+\alpha}$  – значення оцінки прирощення, отримане за процедурою (3.24) на  $(i - k - 1)$ -му кроці обчислень.

Величина  $k$  визначає число рядків матриці  $\mathbf{C}$ .

6) Сформувати вектор

$$\mathbf{V} = (y_i, \dots, y_{i-k-1})^T.$$

7) Визначити коефіцієнти  $a, b$  контрольного алгоритму (3.24) з системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{CQ} = \mathbf{V},$$

де  $\mathbf{Q} = (a, b)^T$ .

Для продовження розв'язування перейти до п. 1.

Як видно з наведеної процедури розв'язування, необхідні додаткові обчислення щодо визначення поточного значення коефіцієнтів  $a, b$ . Спростити процедуру контролю можна, визначаючи не весь вектор  $\mathbf{Q}$ , а його частину, вважаючи інші компоненти вектора такими, що рівні за значеннями, та такими, що отримані з умови точного результату за контрольною формулою для

багаточлена можливо високого ступеня. Так, в процедурі, яка аналізувалася, можна було визначати перший коефіцієнт  $a$ , вважаючи інший  $b = 1$ . Це відповідає перетворенню моделі (усічення моделі за параметрами).

Відмінність другого алгоритму полягає у способі визначення різниці між значеннями величин, отриманих по основному  $A_b$  та контрольному (екстраполяційному або інтерполяційному) алгоритмах, яка і являє собою похибку контролю. Зокрема, для екстраполяційного алгоритму виду (3.13) похибка  $\xi$  визначається різницею залишкових членів основного  $A_b$  та контрольного  $A_k$  алгоритмів.

Припустимо, що для задачі виду (3.21), (3.22) основний алгоритм  $A_b$  реалізує однокрокову процедуру, залишковий член якої має вигляд

$$r_0 = G_0 h_i^{k_0+1} y^{k_0+1} \varepsilon_0, \quad t_i \leq \varepsilon_0 \leq t_{i+1}; \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (3.25)$$

де  $k_0$  – порядок точності основного алгоритму  $A_b$ ;

$G_0$  – деякий постійний коефіцієнт.

Тоді, для значення функції, отриманого по алгоритму  $A_b$  на  $(i+1)$ -му кроці обчислень можна записати

$$y_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} + G_0 h_i^{k_0+1} y^{k_0+1} \varepsilon_0; \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (3.26)$$

де  $\tilde{y}_{i+1}$  – точне значення функції на  $(i+1)$ -му кроці обчислень за умови точного результату на попередніх кроках (в даному випадку враховується тільки *локальна* похибка на кроці, що визначається методичною похибкою числового методу).

**Алгоритм  $A_{ak}^2$ .**

1) Записуються вирази виду (3.25), (3.26) для контрольного алгоритму:

$$r_k = G_k h_i^{k_0+1} y^{k_0+1} \varepsilon_k, \quad t_i \leq \varepsilon_k \leq t_{i+1}; \quad i = \overline{0, n-1},$$

$$\bar{y}_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} + G_0 h_i^{k_0+1} y^{k_0+1} \varepsilon_0; \quad i = \overline{0, n-1},$$

де  $r_k$  – порядок точності контрольного алгоритму;

$G_k$  – постійний коефіцієнт.

2) Обчислюється різниця значень, отриманих за основним  $A_b$  та контрольним  $A_k$  алгоритмах

$$R_{i+1} = y_{i+1} - \bar{y}_{i+1} = G_0 h_i^{k_0+1} y^{k_0+1} \varepsilon_0 - G_k h_i^{k_0+1} y^{k_0+1} \varepsilon_k, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (3.27)$$

3) Після проведення контролю на  $i$ -му кроці обчислень при відсутності збоїв (що встановлюється при контролі) визначається оцінка різниці залишкових

членів  $R_i$  основного  $A_b$  та контрольного  $A_k$  алгоритмів

$$R_i = y_i - \bar{y}_i, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (3.28)$$

Величину  $R_i$  можна використовувати для компенсації різниці залишкових членів  $R_{i+1}$  на  $(i+1)$ -му кроці обчислень, якщо

$$R_i = R_{i+1}. \quad (3.29)$$

4) Для екстраполяційного алгоритму (3.13) контрольна формула з компенсацією різниці залишкових членів має вигляд:

$$\bar{y}_{i+1}^R = \bar{y}_{i+1} + R_i, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (3.30)$$

Для інтерполяційного алгоритму (3.20) різниця (3.28) визначає оцінку залишкового члена контрольної інтерполяційної формули. Контрольний інтерполяційний алгоритм з компенсацією має вигляд:

$$\bar{y}_i^R = \bar{y}_i + R_{i-1}, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (3.31)$$

Контрольні алгоритми з компенсацією виду (3.30) та (3.31) можна записати через значення, отримані за основним алгоритмом  $A_b$ . Для цього необхідно величину  $R_i$  в (3.30) або в (3.31) представити у вигляді (3.28), записавши замість величини  $\bar{y}_i$  алгоритм її отримання (екстраполяційний або інтерполяційний).

Наприклад, при використанні компенсації в контрольному алгоритмі (3.24) величина  $R_i$  для (2.28) визначається як (для простоти, за умови  $a = b = 1$ )

$$R_i = y_i - y_{i-1} - h_i \dot{y}_{i-2+\alpha}, \quad i = \overline{0, n-1} \quad (3.32)$$

і контрольний алгоритм з компенсацією (3.30) набуде вигляду

$$\bar{y}_{i+1}^R = \bar{y}_{i+1} + R_i = (2y_i - y_{i-1}) + h_i (\dot{y}_{i-1+\alpha} + y_{i-2+\alpha}), \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (3.31)$$

На рис. 3.5 та рис. 3.6 показано залежності математичного очікування та середнього квадратичного значення величини  $\xi$ , що визначалася для прикладної

задачі у розділі 3.2 за формулою

$$\xi = \sum_{j=1}^n \frac{|y_{j,i} - \bar{y}_{j,i}|}{\max_t |y_j|}, \quad j = \overline{1,6}.$$

при використанні для контролю числового розв'язку екстраполяційної формули першого порядку точності виду

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h_i y_{i-1+\alpha}$$

без компенсації різниці залишкових членів та формули (3.32) з компенсацією, відповідно. Як впливає з графіків, точність контролю з компенсацією різниці залишкових членів на порядок вищій точності контролю без компенсації.

Прийняття рішення щодо наявності або відсутності збою при здійсненні обчислень, приймається у відповідності до способу, описаному у додатку В.

### ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

Визначено можливості контролю достовірності обчислювальної реалізації ММ динамічних систем в процесах їх моделювання та управління. Запропоновано метод *зі зростаючою точністю обчислень*, який, на відміну від базового та модифікованого методів прогнозу та корекції, дозволяє послідовно (зокрема на окремих кроках інтегрування) отримувати значення шуканої функції стану динамічних систем з порядком точності локальної похибки, що збільшується. Причому, порядок точності може бути завдано попередньо, до виконання основних етапів числової реалізації ММ динамічної системи.

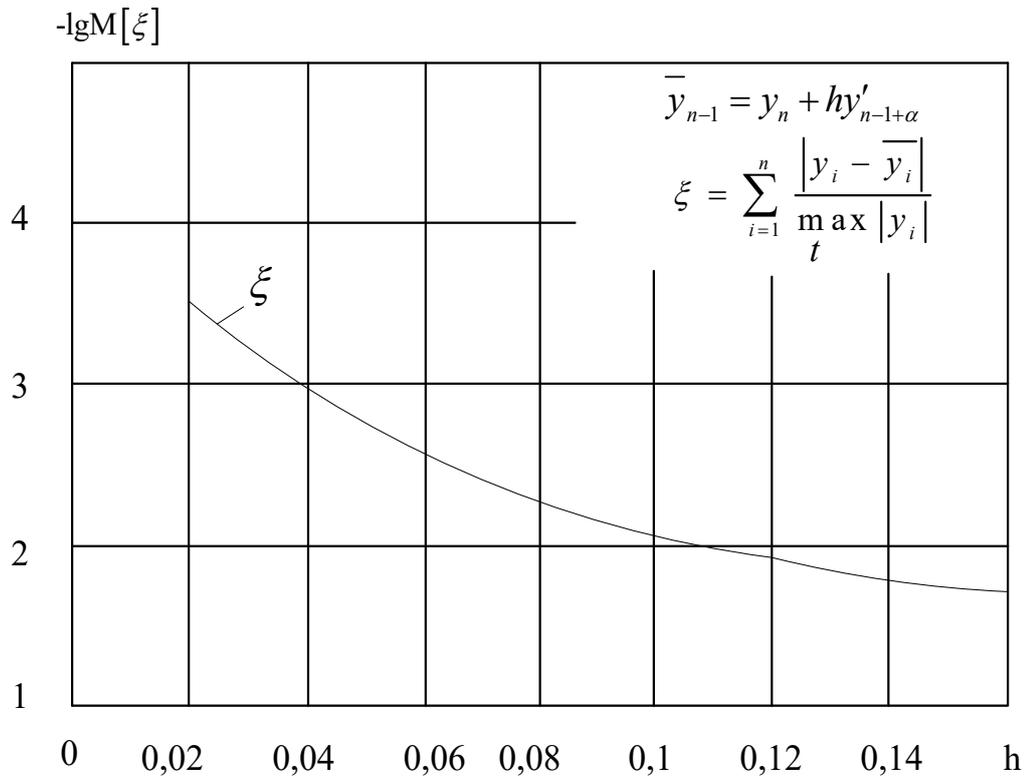


Рисунок 3.5. – Залежність математичного очікування  $M[\xi]$  величини  $\xi$  від кроку  $h$

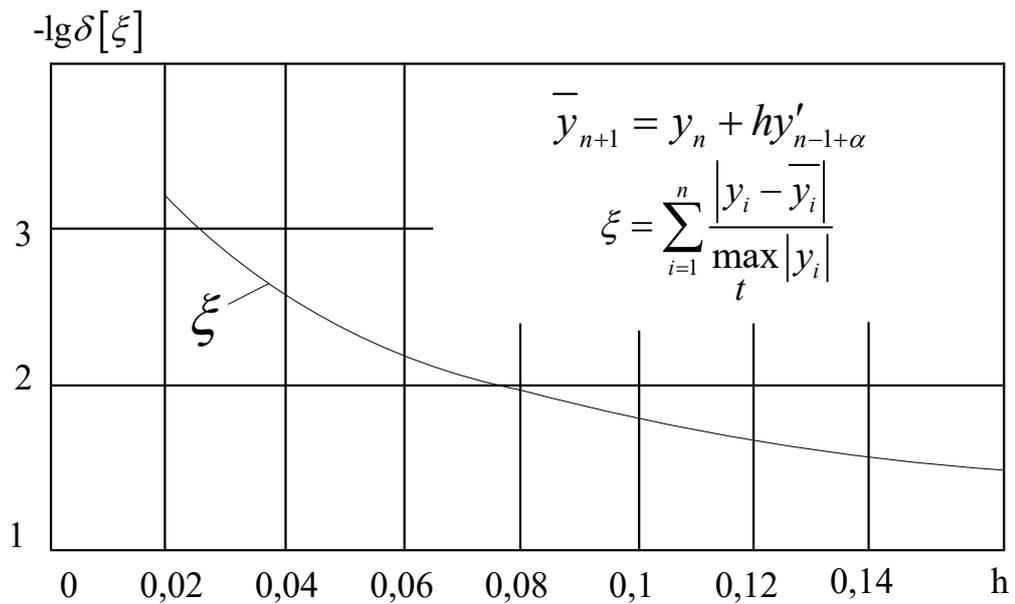


Рисунок 3.6. – Залежність середнього квадратичного відхилення  $\sigma[\xi]$  величини  $\xi$  від кроку  $h$

Запропоновано методи *алгоритмічного* контролю, які може бути застосовано для контролю процесу обчислень при будь-яких методах числового розв'язування рівнянь динаміки, а саме: екстраполяційний та інтерполяційний методи контролю. Методи ґрунтуються на застосуванні контрольного алгоритму, який виконується на етапі числового розв'язування поставленої (основної) задачі, але такого, що простіший за основний. Відмінність даних методів полягає в тому, що екстраполяційний метод дозволяє досягнути підвищення достовірності обчислень за рахунок застосування в контрольному алгоритмі інформації, яку вже проконтрольовано на попередніх кроках основного алгоритму, а інтерполяційний метод дозволяє організувати неявний контроль, що забезпечує зменшення діапазону відхилення величини, яка контролюється від контрольної, тобто дозволяє знизити рівень шуму.

Запропоновано критерії, які дозволяють зробити висновок про наявність (або відсутність) похибки в основному алгоритмі числової реалізації ММ динамічної системи, що дає змогу виявляти збої в роботі основного обчислювального алгоритму. Це дозволило розробити адаптивні методи контролю достовірності обчислювальної реалізації ММ динамічних систем, які (методи) забезпечують визначення параметрів контрольного алгоритму з умови мінімуму обраної міри близькості результатів, отриманих за контрольним та основним алгоритмах числової реалізації ММ динамічних систем.

Для виконання практичних розрахунків при організації контролю процесу обчислень запропоновано *спосіб прийняття рішень* за яким визначається наявність або відсутність збою та приймається рішення щодо подальшого перебігу обчислювального процесу. Спосіб ґрунтується на уведенні до розгляду міри розбіжності значень (або їх не збігання), отриманих за основним та контрольним алгоритмах, а також призначення допуску на цю міру та подальшого обрання стратегії продовження обчислювального процесу.

#### 4 ДОСВІД ПРАКТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ АНАЛІЗУ ПОХИБКИ ТА КОНТРОЛЮ ДОСТОВІРНОСТІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ

У цьому розділі розглянемо (на типових прикладах) визначення – із застосуванням запропонованих в дисертаційній роботі методів – точності та достовірності контролю обчислювальної реалізації моделей динамічних систем в задачах їх моделювання та управління.

Для конкретності подальшого розгляду, в якості динамічної системи, оберемо первинні перетворювачі сигналів акустичної емісії (ППСАЕ), що застосовуються в системах неруйнівного контролю технічних об'єктів [277]. Конструктивно ППСАЕ (датчики сигналів АЕ) можуть являти собою: ємнісні перетворювачі, перетворювачі електромагнітного типу, керамічні п'єзоперетворювачі та полімерні п'єзоперетворювачі [278]–[280].

Динамічні властивості ППСАЕ переважно описуються амплітудно-частотними характеристиками (АЧХ) в діапазоні частот (0 – 50) МГц. Узагальнено ММ ППСАЕ, враховуючи результати роботи [277], представимо наступним чином. Будемо вважати, що параметри ППСАЕ є постійними в часі (тобто без властивості старіння) та частотнезалежними, тоді, в якості ММ останніх, можна прийняти звичайне лінійне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами та нульовими початковими умовами (що відповідає початково не збудженій системі):

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}; \quad m \leq n, \quad (4.1)$$

$$y(t)|_{t=0} = 0; \left. \frac{d^l y(t)}{dt^l} \right|_{t=0} = 0; \quad l = 1, 2, \dots, (i-1), \quad (4.2)$$

де  $y(t)$  – вихідний сигнал ППСАЕ;

$x(t)$  – вхідний сигнал ППСАЕ;

$a_i, b_j$  – постійні коефіцієнти, що являють собою параметри ММ ППСАЕ.

Зважаючи, що ППСАЕ мають явно виражені інерційні характеристики (зокрема, затримку сигналу на виході) та необхідність враховувати при контролі попередні сигнали АЕ, доцільно представити ММ ППСАЕ виду (4.1), (4.2) у вигляді еквівалентного інтегрального рівняння, застосовуючи при цьому операторну форму відповідних рівнянь. Очевидно, що в операторній формі ММ виду (4.1), (4.2) буде представлено наступним чином:

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i Y(p) = \sum_{j=0}^m b_j p^j X(p); \quad m \leq n, \quad (4.3)$$

$$Y(0) = 0; \quad Y(0)p^l = 0; \quad l = 1, 2, \dots, (i-1). \quad (4.4)$$

Із застосуванням інтегральної форми рівняння (4.3) запишеться так

$$\sum_{i=0}^n a_{n-i} p^{-i} Y(p) = \sum_{j=0}^m b_{n-j} p^{-j} X(p); \quad a_0 = 1, \quad b_j = 0, \quad m \leq n, \quad (4.5)$$

де враховано, що множення зображень у лівій і правій частинах на  $p^{-i}$  та  $p^{-j}$  відповідає їх  $i$ -кратному та  $j$ -кратному інтегруванню в області оригіналів. Відомо, що добуток зображень двох функцій відповідає їх згортка в області оригіналів.

Тоді, (4.5) можна представити в області оригіналів наступним чином:

$$\begin{aligned} a_n y(t) + \sum_{i=1}^n \frac{a_{n-1}}{(i-1)!} \int_0^t (t-s)^{i-1} y(s) ds = \\ = b_n x(t) + \sum_{j=1}^m \frac{b_{n-j}}{(j-1)!} \int_0^t (t-s)^{j-1} x(s) ds; \quad a_0 = 1, \quad b_j = 0, \quad m \leq n. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Враховуючи (4.6), можна отримати аналітичний вираз інтегральної динамічної математичної моделі ППСАЕ у формі інтегрального рівняння Вольтерри II роду відносно вхідного сигналу:

$$y(t) = kx(t) + k_1 \int_0^t K(t-s)x(s) ds, \quad (4.7)$$

де  $K(t-s)$  – ядро (вагова функція), що визначає динамічні властивості ППСАЕ;

$$\begin{aligned} k &= a_n / b_n; \\ k_1 &= \left[ \sum_{i=1}^n \frac{a_{n-1}}{(i-1)!} \right] / \left[ \sum_{j=1}^m \frac{b_{n-j}}{(j-1)!} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, у подальших дослідженнях, в якості ММ ППСАЕ, будемо використовувати ММ виду (4.7). Цифрові значення коефіцієнтів та ядра рівняння (4.7) оберемо з наступних міркувань.

Динамічні властивості ППСАЕ (що обумовлюють вид ядра  $K(t-s)$  у виразі (4.7)) будемо формулювати відносно характеристики його *чутливості* – здатності генерувати вихідний відгук на сигнал АЕ певної амплітуди та частоти [277], яку, в даному випадку, визначимо наступним чином. Вхідним сигналом  $x(t)$  ППСАЕ розглядається сигнал АЕ, спричинений ехо-сигналом від опромінення ділянки механічної конструкції, цілісність якої контролюється. Вихідний сигнал ППСАЕ  $y(t)$  формується як відгук на зафіксований (тобто детектований) ехо-сигнал.

Параметр чутливості ППСАЕ залежить від *інтенсивності* (суть – енергії) прийнятого ехо-сигнала, яка, в свою чергу, визначається квадратом відстані від джерела ехо-сигнала (опроміненої ділянки) до датчика АЕ. Очевидно, що дотично, зазначений квадрат відстані можна оцінити квадратом часу  $t$ , за який фіксується сигнал АЕ. Також в моделі ППСАЕ необхідно врахувати інтерфераційні складові в сигналі  $x(t)$ , що можна визначити як адитивну складову енергії останнього, і також дотично виражену через незалежний параметр часу  $t$ . Коефіцієнт передачі ППСАЕ як динамічної ланки (у вигляді коефіцієнта  $k$  у виразі (4.7)) є частотно-залежним від вхідного сигналу  $x(t)$  і, з урахуванням ККД [277], може перебувати в діапазоні  $(0,6...0,95)$ . Коефіцієнт  $k_1$  визначає конструктивні особливості ППСАЕ в залежності від фізичних процесів перетворення вхідного сигналу  $x(t)$  у вихідний сигнал (сигнал відгуку)  $y(t)$ . При складанні ММ датчика АЕ у вигляді виразу (4.7) будемо вважати, що коефіцієнт  $k_1$  є лінійним та приймає значення близькі до нижньої границі.

Тоді, з урахуванням зроблених зауважень, в якості ММ датчика сигналів АЕ, яку буде застосовано для числових експериментів, приймемо наступне інтегральне рівняння Вольтерри II роду

$$y(t) = 0,75x(t) + 0,25 \int_0^t [3x(t)t^2 + 2t]x(t)dt. \quad (4.8)$$

Нижче розглянемо прикладні можливості запропонованих у розділах 2 та 3 методів визначення точності та достовірності при обчислювальній реалізації моделей динамічних систем в ході розв'язування типових для практики задач.

#### 4.1 Прогнозне оцінювання точності моделювання первинного перетворювача сигналів акустичної емісії

Розробимо алгоритм розв'язування задачі моделювання датчика сигналів АЕ та оцінки точності її розв'язку у загальному вигляді, використовуючи ММ виду (4.7).

- 1) Сформуємо сітку з кроком  $h$ :

$$t_i = \alpha_i + ih; i = \overline{0, N}; \alpha + Nh \leq \beta < \alpha + (N + 1)h,$$

де  $\alpha$  – нижня границя інтегрування для виразу (4.7).

- 2) Покладемо в (4.7)  $t = t_i$  та розглянемо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} y(t_0) &= f(\alpha); \\ y(t_i) &= \int_{\alpha}^{t_i} K(t_i, s)y(s)dt = f(t_i), i = \overline{1, N}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

- 3) Для обчислення інтегралу в (4.9) оберемо *квадратурну формулу* [18], [97], [187], [269], [281] з вузлами в точках  $t_0, t_1, \dots, t_i$ :

$$y(t_i) = \int_{\alpha}^{t_i} K(t_i, s)y(s)dt = h \sum_{j=0}^i A_{ij} K_{ij} y(t_j) + r_i, \quad (4.10)$$

де  $K_{ij} = K(t_i, t_j)$ :

$r_i$  – залишок квадратурного правила (визначає точність розв'язку).

4) Підставляючи (4.10) в (4.9), отримаємо систему

$$\left. \begin{aligned} y(t_0) &= f_0; \\ y(t_i) + h \sum_{j=0}^i A_{ij} K_{ij} y(t_j) + r_i &= f_i, i = \overline{1, N}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Розв'язуючи (4.11) відносно  $y(t_i) = y_i$ , віднайдемо значення  $y_i$ .

Оскільки обчислення при розв'язуванні системи (4.11) виконуються з похибками, то замість (4.11) отримуємо

$$y(t_i) + h \sum_{j=0}^i A_{ij} K_{ij} y(t_j) = f_i + \delta_i, i = \overline{1, N}, \quad (4.12)$$

де  $\delta_i$  – похибка обчислень.

5) Позначимо

$$\varepsilon_{ii} = y_i - y(t_i), i = 0, 1, \dots$$

Відніmemo з (4.12) рівняння (4.11):

$$\varepsilon_i + h \sum_{j=0}^i A_{ij} K_{ij} \varepsilon_j = r_i + \delta_i, i = \overline{1, N}.$$

6) Позначимо  $A = \max_{i,j} |A_{ij}|$ ;  $K = \max_{(t,s)} K(t,s)$ .

Приймається, що при всіх достатньо малих  $h$  виконується нерівність

$$h |A_{ii} K_{ii}| \leq q < 1; i = \overline{1, N}.$$

Обчислюється оцінка похибки

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{1}{1-q} \exp((\beta - \alpha)AK/(1-q)) [r + \delta + AK|\varepsilon_0| h],$$

де  $|r_i| \leq r = r(h)$ ;  $|\delta_i| \leq \delta = \delta(h)$ .

Оцінка, отримана за наведеним вище алгоритмом, дозволяє зробити висновок щодо збіжності наближеного розв'язку  $y_i$  до точного  $y(t)$ .

Проведемо числовий експеримент із застосуванням ММ виду (4.8).

Задаємо значення кроку  $h$  та числа розбиття інтервалу інтегрування  $n$ , а саме:  $h = 0,2$ ;  $n = 4$ .

Обчислимо  $f(t_i)$ ;  $i = \overline{1,5}$ ;  $f(t) = 0,75x(t)$ .

$$f = [0; 0,15; 0,3; 0,45; 1,35]^T.$$

Обчислимо  $K(t_j, t_i)$ :

$$K(t_j, t_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0,4 & 0,8 & 1,2 & 1,6 \\ 0 & 0,424 & 0,896 & 1,416 & 1,984 \\ 0 & 0,448 & 0,992 & 1,848 & 2,248 \\ 0 & 0,472 & 1,088 & 1,668 & 2,579 \\ 0 & 0,496 & 1,184 & 1,824 & 3,136 \end{bmatrix}.$$

Запишемо формулу щодо складання СЛАР для віднаходження  $y_i$ ,  $i = \overline{1,5}$ :

$$y_i - \lambda h / 3 \left[ K_{i,1} y_1 + K_{i,5} y_5 + 2 \sum_{j=1}^2 (2K_{i,2j-1} y_{2,j-1} + K_{i,2j} y_{2,j}) \right] = f_i, \quad i = \overline{1,5};$$

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{d}.$$

Останнє матричне рівняння у числовому вираженні набуває вигляду:

$$\begin{bmatrix} -30 & 3,2 & 3,2 & 9,6 & 3,2 \\ 0 & -256 & 35,8 & 108,5 & 39,7 \\ 0 & 35,8 & -262 & 121 & 47,3 \\ 0 & 37,8 & 43,5 & -177,7 & 55 \\ 0 & 397 & 4,74 & 14,6 & -23,73 \end{bmatrix} \cdot [y_i]^T = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ -30 \\ -75 \\ -12 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Розв'язування СЛАР (4.13) виконується методом стрічкового виключення Гауса, що можна представити наступною схемою (врахувавши, що матриця  $\mathbf{A}$  представляється як добуток двох трикутних матриць:  $\mathbf{\Xi}$  – верхньої трикутної, та  $\mathbf{\Sigma}$  – нижньої трикутної, з елементами, відповідно,  $\mathbf{\Xi} = [\xi_{ij}]$  і  $\mathbf{\Sigma} = [\sigma_{ij}]$ , причому  $\mathbf{A} = \mathbf{\Xi}\mathbf{\Sigma}$ . Тоді шуканий вектор  $[y_i]^T$  може бути обчислений з ланцюжка рівнянь  $\mathbf{\Xi}\mathbf{u} = \mathbf{d}$ ,  $\mathbf{\Sigma}\mathbf{y} = \mathbf{u}$ . Оскільки матриці  $\mathbf{\Xi}$  та  $\mathbf{\Sigma}$  – трикутні з одиничними діагоналями, то система (4.13) легко розв'язується).

Для зручності візуалізації процесу розв'язку системи (4.13) представимо його у вигляді наступної таблиці (табл. 4.1). Верхні стовпчики та ліві рядки утворюють елементи матриць  $\mathbf{\Xi}$  та  $\mathbf{\Sigma}$  (відповідно), а нижні стовпчики та праві рядки – елементи векторів  $u_i$  та  $y_i$  (відповідно). При цьому, жирним шрифтом виділено елементи вектору-розв'язку.

Остаточну отримуємо:  $y(t) = [0,182 \ 0,078 \ 0,065 \ 0,183 \ 0,679]^T$ , що являє собою вектор-функцію вихідного сигналу датчика АЕ.

Скориставшись запропонованим методом ранжирування (розділ 2.1) отримаємо оцінку неусувної похибки визначення вектору шуканої функції  $y(t)$ , який було отримано вище.

Таблиця 4.1 – Візуалізація розв'язку СЛАР виду (4.13)

$\xi_{ij}$							$u_i$
$\sigma_{ij}$	-30	-0,11	-0,11	-0,32	-0,21	0,2	
	0	-256	=0,14	-0,424	-0,155	-0,06	
	0	35,8	-257	-0,53	-0,206	0,108	
	0	38,8	48,8	-124,7	-0,568	0,569	
	0	367	60,3	215	169,4	-0,679	
	<b>0,182</b>	<b>0,078</b>	<b>0,065</b>	<b>0,183</b>	<b>0,679</b>		
$y_i$							

В основу аналізу покладемо вираз (2.13), що характеризує абсолютну похибку реалізації моделі динамічної систем (в даному випадку – первинного перетворювача сигналів АЕ – ППСАЕ), та вираз (2.14), який дає оцінку норми відповідного вектору похибки при розв'язуванні рівнянь динаміки досліджуваного ППСАЕ.

Нехай, з урахуванням отриманої вище моделі ППСАЕ виду (4.13), вирази для абсолютної похибки (2.13) та норми вектору похибки (2.14) набувають вигляду, відповідно:

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}) = \mathbf{d} + \Delta\mathbf{d} = \\
 & \begin{bmatrix} -30 & 3,2 & 3,2 & 9,6 & 3,2 \\ 0 & -256 & 35,8 & 108,5 & 39,7 \\ 0 & 35,8 & -262 & 121 & 47,3 \\ 0 & 37,8 & 43,5 & -177,7 & 55 \\ 0 & 397 & 4,74 & 14,6 & -23,73 \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} -2,4 & 0,26 & 0,21 & 0,71 & 0,08 \\ 0,01 & -16,4 & 4,3 & 9,26 & 2,6 \\ 0,02 & 3,1 & -21,2 & 7,15 & 2,46 \\ 0,01 & 2,72 & 5,7 & -8,2 & 3,7 \\ 0,015 & 21,6 & 1,42 & 3,1 & -4,53 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,182 + \Delta y_1 \\ 0,078 + \Delta y_2 \\ 0,065 + \Delta y_3 \\ 0,183 + \Delta y_4 \\ 0,679 + \Delta y_5 \end{bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ -30 \\ -75 \\ -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,72 \\ 2,64 \\ -1,48 \\ -3,37 \\ -0,83 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

$$\|\Delta \mathbf{y}\| \leq \begin{bmatrix} 0,37 & 1,62 & 0,014 & 2,34 & 1,31 \\ 0,12 & -1,58 & 1,73 & 7,16 & 0,72 \\ 0,014 & 0,49 & 11,69 & 2,03 & 3,28 \\ 0,17 & 5,33 & 0,46 & 1,38 & 0,16 \\ 0,026 & 8,47 & 3,51 & 0,37 & -1,41 \end{bmatrix} \times \|\boldsymbol{\varepsilon}\|. \quad (4.15)$$

Зазначимо, що у випадку, який розглядається, відомі матриця  $\mathbf{A}$  та вектор  $\mathbf{d}$ , тому можна скористатися оцінкою (4.15), що відповідає зауваженню, зробленому в розділі 2.1.

Для подальших розмірковувань приймемо, що параметри, які визначають точність розв'язування поставленої задачі, складають:  $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = 1,472$  (виходячи з виразу (4.15)),  $\|m_\varepsilon\|_2 = 3,618 \cdot 10^3$ ,  $\|D\|_2 = 2,37 \cdot 10^3$ ,  $\|\mathbf{y}\|_2 = 0,679$ . Використовуючи функції розподілу  $\|\varepsilon_0\|_2$  (таблиця 2.2 у розділі 2.1) при  $n = 4$ , отримуємо:

$$P\{\|\Delta \mathbf{y}\|_2 / \|\mathbf{y}\|_2 \leq 0,0993\} \geq 0,96.$$

Тобто ймовірність отримання вірного розв'язку складає не менше 0,96.

#### 4.2 Розробка та застосування завадостійких алгоритмів числового розв'язування рівнянь динаміки

Розглянемо питання побудови та практичного застосування завадостійких алгоритмів числового розв'язування рівнянь динаміки на основі методів, запропонованих у третьому розділі дисертаційної роботи. Властивістю *завадостійкості* володіють алгоритми, здатні послаблювати вплив збоїв на точність розв'язування задачі.

Очевидно, що завадостійкі алгоритми числового розв'язування рівнянь динаміки, побудовані з використанням *контрольного алгоритму* (наприклад, таких, що запропоновано у третьому розділі), повинні містити в собі наступні блоки:

- блок розв'язування основної задачі (БРОЗ);
- блок, який реалізує контрольний алгоритм (БКА);
- контрольно-керуючий блок (ККБ).

При цьому в ККБ визначається значення міри точності обчислень, відбувається порівняння отриманого значення з допустимим та приймається рішення щодо подальшого перебігу обчислювального процесу. Після цього процес розв'язку основної задачі (блок БРОЗ) або продовжується, або, у випадку виявлення збою (блок БКА), відбувається корекція розв'язку.

Структури відомих завадозахищених алгоритмів, в тому числі алгоритмів обробки зображень (наприклад, [282] – [287]) визначаються наступними факторами:

- алгоритмом числового розв'язування рівнянь динаміки;
- величинами, які контролюються (вхідними та вихідними сигналами, параметрами ММ динамічної системи, зовнішніми впливами тощо);
- мірою точності обчислень;
- видом контрольного алгоритму;
- ступенем паралелізму виконання обчислень по основному та контрольному алгоритмах;

– способом (методом) корекції розв'язку при виявленні похибок.

Вид основного алгоритму числового розв'язку рівнянь динаміки (для конкретності будемо посилалися на рівняння динаміки виду (3.1)) визначають величини, які використовуються в якості вихідних даних при обчисленнях за контрольним алгоритмом, а також зв'язку для обміну результатами обчислень по паралельних гілках завадо захищеного алгоритму.

Для подальших розмірковувань оберемо алгоритми з *покомпонентним контролем* елементів вектору  $Y(t)$ , який контролюється. В якості контрольних будемо розглядати алгоритми, що реалізують екстраполяційні (розділ 3.2) та інтерполяційні (розділ 3.3) методи контролю.

В залежності від *ступеню паралелізму* виконання операцій за основним  $A_b$  та контрольним  $A_k$  алгоритмах можна виділити послідовні, паралельні та послідовно-паралельні структури заводостійких алгоритмів [282], [284]. Надалі будемо розглядати паралельні структури заводостійких алгоритмів як такі, що надають найбільшої наочності. Уявімо, що час розв'язування за додатковим (контрольним) алгоритмом  $A_k$  дорівнює  $t_d$ , а час роботи блоку ККБ дорівнює  $t_{kk}$ . Якщо обчислювальний процес розбито на  $N$  частин, які контролюються, то загальний час розв'язування збільшується, у порівнянні з часом з виконанням основного алгоритму, на величину  $t_N = t_{kk} N$ , оскільки, для прийнятих нами паралельних структур заводозахищених алгоритмів, обчислення по основному та додатковому алгоритмах розпаралелюються. Тобто, загальний час обчислень при числовому розв'язуванні задачі в даному випадку не враховує час  $t_d$  виконання додаткового (контрольного) алгоритму, оскільки останній виконується паралельно з основним алгоритмом, час виконання якого дорівнює (з урахуванням прийнятих вище позначень)  $t_b$ .

Для *екстраполяційного* методу контролю корекція розв'язку буде полягати у наступному. Відбувається заміна хибного значення, отриманого за алгоритмом  $A_b$ , значенням, отриманим за алгоритмом  $A_k$ . В цьому випадку можна вважати,

що час корекції є нульовим, тобто  $t_{\text{кор}} = 0$ , а похибка, яка вноситься у розв'язок, є випадковою величиною, що визначається виразом:

$$\Delta Y = \begin{cases} \Delta Y^1 & \text{при події } \overline{AB}; \\ \Delta Y^2 & \text{при події } A\overline{B}; \\ \Delta Y^3 & \text{при події } \overline{A}\overline{B}. \end{cases} \quad (4.71)$$

Кожна з величин  $\Delta Y^l$ ,  $l = \overline{1,3}$  характеризується своєю щільністю розподілу  $\rho(\Delta Y^l)$ ,  $l = \overline{1,3}$ . Розглянута заміна хибного значення, отриманого в результаті обчислень, доцільна, якщо ймовірність події  $\overline{A}\overline{B}$  значно менша ймовірності інших подій у виразі (4.71), тобто  $P(\overline{A}\overline{B}) \ll P(A\overline{B})$  та  $P(\overline{A}\overline{B}) \ll P(A\overline{B})$ .

Для визначення збою за алгоритмом  $A_k$  (подія  $\overline{B}$ ) пропонується застосовувати додаткові заходи, які полягають, зокрема, у порівнянні значення, отриманого за алгоритмом  $A_k$  з найближчим достовірним значенням (наприклад, значенням функції, отриманому на попередньому кроці за алгоритмом  $A_b$ , тобто подією  $A$ ). Таке порівняння дозволить виключити грубі похибки, що вносяться у розв'язок при корекції щодо подій  $A\overline{B}$  або  $\overline{A}\overline{B}$ .

Алгоритм прийняття рішень та корекції (блок ККБ) в цьому випадку може мати вигляд, представлений на рис. 4.1.

На рис. 4.2 наведено граф, що ілюструє систематизацію факторів, які визначаються конкретними вимогами, що висуваються до завадостійких алгоритмів. Зокрема, на рис. 4.3 наведено структуру алгоритму, в якому основний алгоритм  $A_b$  реалізує метод числового розв'язування, що не потребує обчислення правої частини системи рівнянь (яка розв'язується) між вузлами інтегрування (метод Ейлера, метод «прогноз-корекція», багатокрокові методи). На рисунку позначення блоків, що реалізують основний та контрольний алгоритми, співпадають з величинами, які має бути отримано в результаті виконання цих алгоритмів.

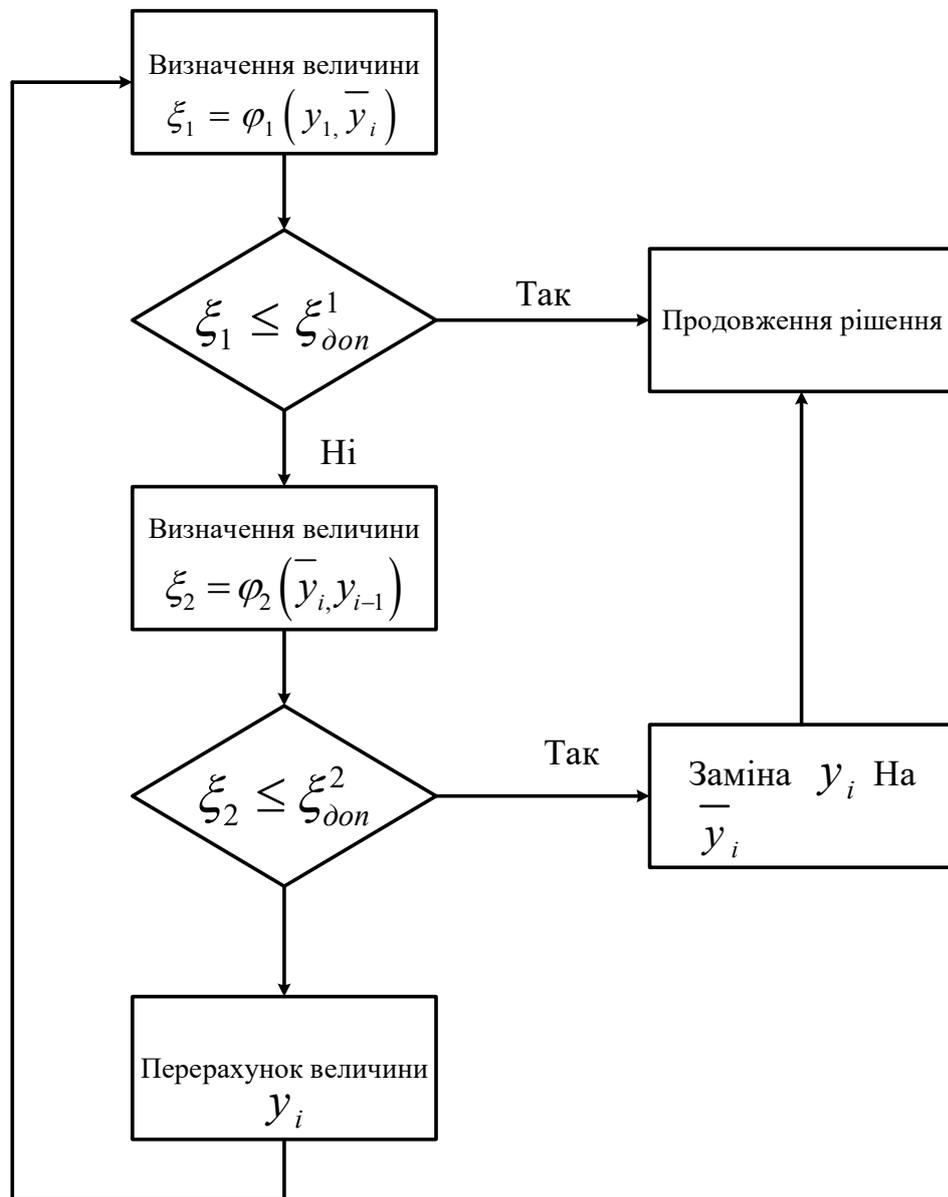


Рисунок 4.1. – Алгоритм прийняття рішень та корекції

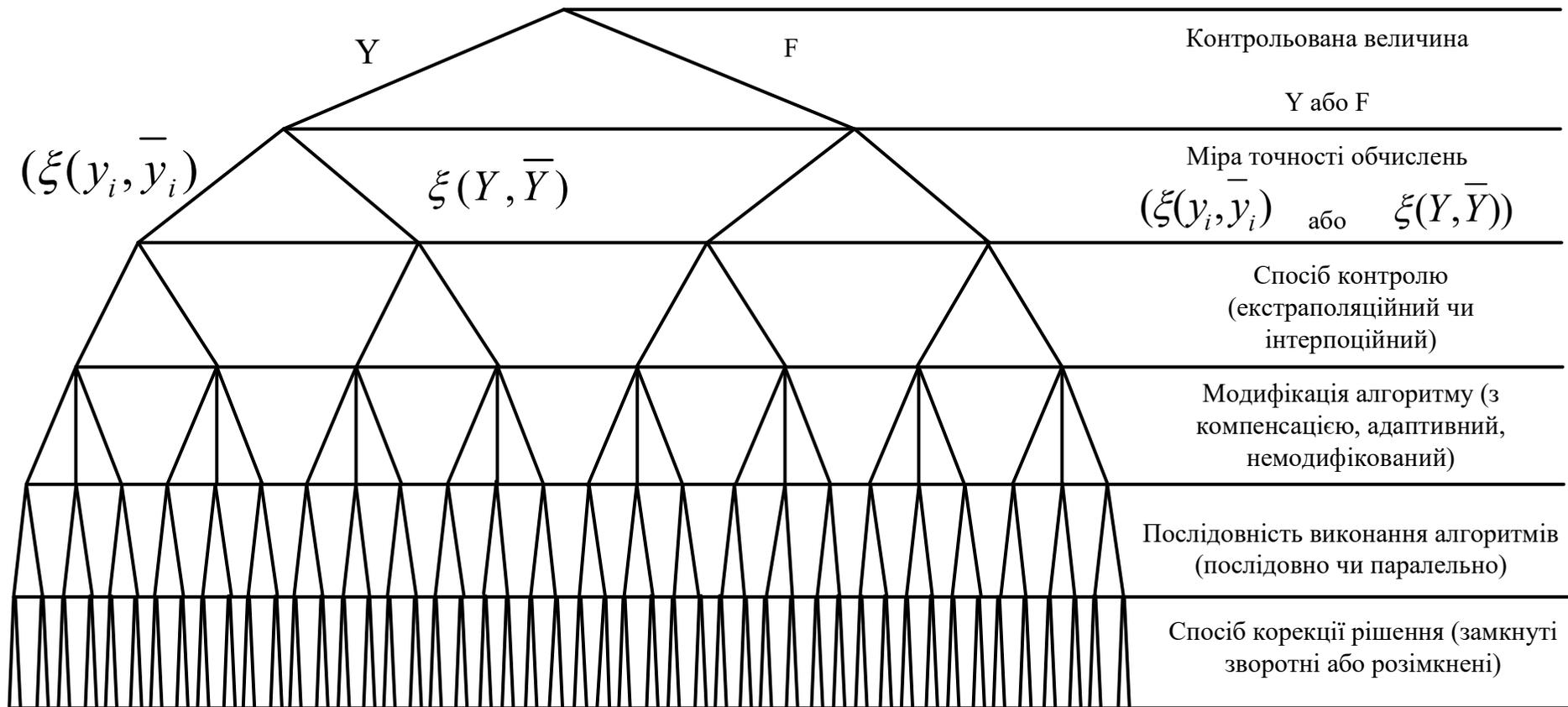


Рисунок 4.2. – Граф щодо ілюстрації систематизації факторів, які визначаються конкретними вимогами, що висуваються до завадостійких алгоритмів

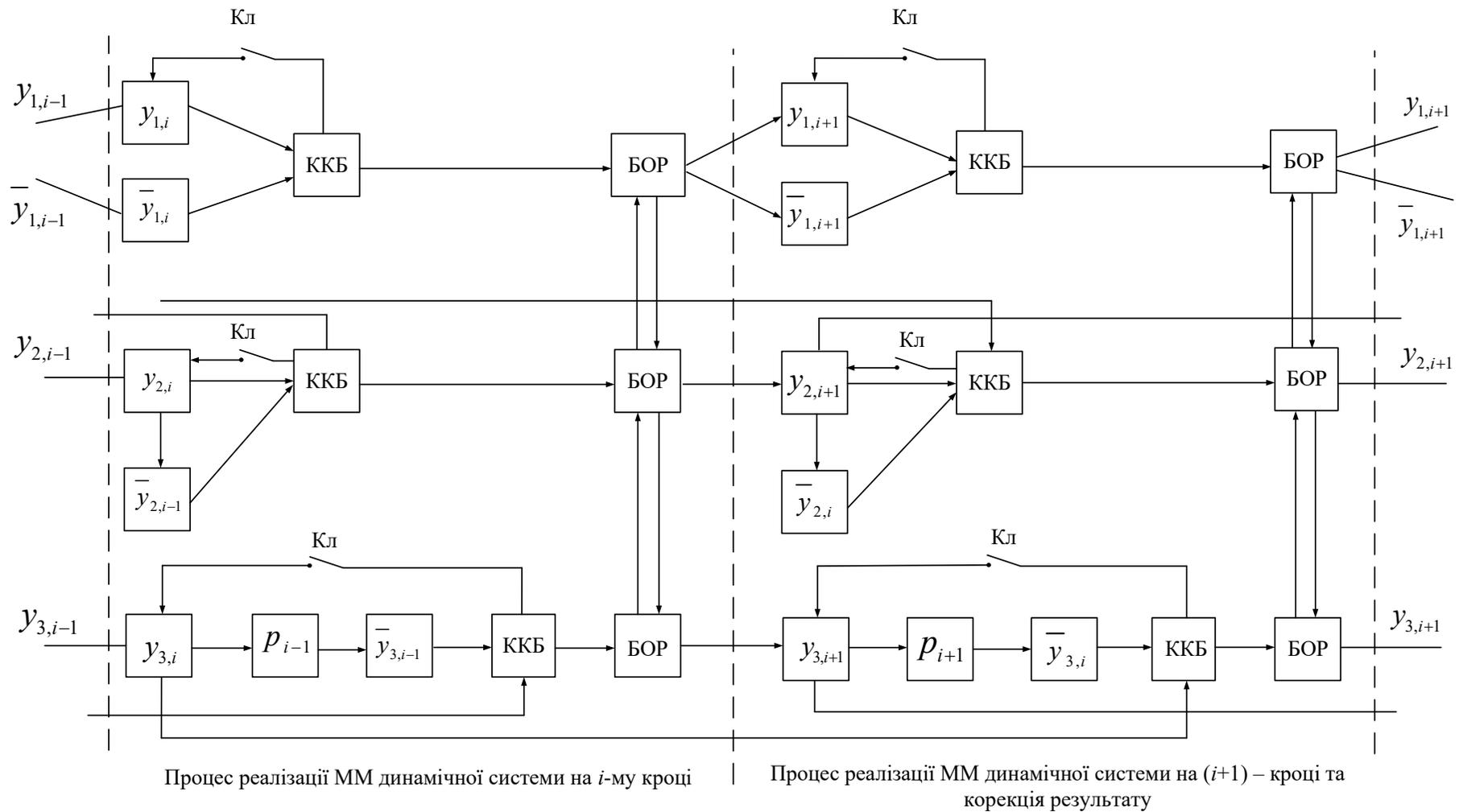


Рисунок 4.3. – Структура алгоритму, в якому основний алгоритм  $A_b$  реалізує метод числового розв'язування, що не потребує обчислення правої частини системи рівнянь (яка розв'язується) між вузлами інтегрування

Крім того в структурі алгоритму наявними є блок обміну результатами (БОР) та контрольно-керуючий блок (ККБ). Штрих-пунктирною лінією відокремлено процес обчислень на етапі реалізації ММ динамічної системи. В наведеному алгоритмі здійснюється *покомпонентний* контроль вектору розв'язку  $Y = [Y^1, Y^2, Y^3]^T$ . При цьому компонента  $Y^1$  контролюється за допомогою екстраполяційного, компонента  $Y^2$  – інтерполяційного, а компонента  $Y^3$  – адаптивного (або екстраполяційно-адаптивного) методів контролю. Структура алгоритму визначається як послідовно-паралельна. Метод корекції визначається положенням ключів  $Kл$ , які реалізуються програмним чином. При замкнених ключах  $Kл$  (тобто відповідній гілці програми, що реалізує контрольний алгоритм), корекція відбувається повторенням обчислень на кроці реалізації ММ динамічної системи. При розімкнених ключах  $Kл$  (і гілці програми, що це забезпечує) та контролі екстраполяційним методом, корекція на  $(i + 1)$ -му кроці реалізації ММ динамічної системи відбувається заміною хибних значень  $Y_{i+1}^1$  та  $Y_{i+1}^3$  (у випадку екстраполяційно-адаптивного методу) на  $\bar{Y}_{i+1}^1$  та  $\bar{Y}_{i+1}^3$ , відповідно. При розімкнутих ключах  $Kл$  для компоненти  $Y^2$  корекція хибного значення  $Y_{i+1}^2$  відбувається його заміною на значення  $Y_i^2$ , отримане на попередньому кроці реалізації ММ динамічної системи. Слід зазначити, що описана процедура корекції може бути застосована для випадку «гладких» розв'язків. Для методів числової реалізації ММ динамічних систем, в яких здійснюються обчислення шуканої функції між вузлами дискретизації за часовою координатою (наприклад, при завданні ММ динамічної системи у вигляді диференціального рівняння та інтегруванні дискретної моделі методом Рунге-Кутти) в контрольному алгоритмі необхідно увести зв'язки між паралельними гілками для обміну результатами обчислень.

Зокрема, у останньому випадку, завадостійкий алгоритм, що відповідає структурній схемі, зображеній на рис. 4.3, має наступний вид:

- 1) Привласнити індексу  $j$  значення  $j = 1$ .

2) Обчислити

$$u_{j,1} = hf_j [y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{m,i}, x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_n(t_i), t_i];$$

$$u_{j,2} = hf_j \left[ y_{1,i} + \frac{u_{2,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{u_{2,1}}{2}, \dots, y_{m,i} + \frac{u_{2,1}}{2}, \right.$$

$$\left. x_1\left(t_i + \frac{h}{2}\right), x_2\left(t_i + \frac{h}{2}\right), \dots, x_n\left(t_i + \frac{h}{2}\right), \left(t_i + \frac{h}{2}\right) \right];$$

.....;

$$u_{j,k} = hf_j \left[ y_{1,i} + \frac{u_{k,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{u_{k,1}}{2}, \dots, y_{m,i} + \frac{u_{k,1}}{2}, \right.$$

$$\left. x_1\left(t_i + \frac{h}{2}\right), x_2\left(t_i + \frac{h}{2}\right), \dots, x_n\left(t_i + \frac{h}{2}\right), \left(t_i + \frac{h}{2}\right) \right]; m \leq n,$$

де  $y_{(\cdot)}$  та  $x_{(\cdot)}$  – відповідно дискретні функції лівої та правої частин рівняння динаміки;

$h$  – крок дискретизації за часовою координатою.

3) Обчислити

$$\bar{y}_{1,i+1} = -Ay_{1,i} + By_{1,i-1} + h(Cy_{1,i}^* + Dy_{1,i-1} - Ey_{1,i-2}),$$

де  $y_{1,i}^* = f_1[y_i + u_{j,1}, x_1(t_i + h), (t_i + h)]$ ;

$A, B, C, D, E$  – коефіцієнти, які визначаються обраною схемою дискретизації (сітковою моделлю).

Процедури відшукування значень коефіцієнтів  $A, B, C, D, E$  для низки прикладних задач, пов'язаних з моделюванням дифузійних процесів, детально наведено в роботі [288].

4) Визначити

$$\xi_1 = |y_{1,i+1} - \bar{y}_{1,i+1}|.$$

5) Якщо  $\xi_1 \leq \xi_{\text{доп}}$ , то привласнити  $\alpha_1 = 0$  та продовжити розв'язування (перейти до п. 6). При  $\xi_1 > \xi_{\text{доп}}$ , то, якщо  $\alpha_1 = 0$  замінити  $y_{1,i+1}$  на  $\bar{y}_{1,i+1}$  та привласнити  $\alpha_1 = 1$  і перейти до п. 6. Якщо  $\alpha_1 = 1$ , то розв'язування переривається, оскільки відбулася відмова.

Уведення умовного переходу по  $\alpha_1$  знижує ймовірність того, що при відмові обчислювальний процес піде за контрольним алгоритмом і відмову не буде виявлено.

6) Привласнити індексу  $j$  значення  $j = j + 1$ .

7) Виконати п.2.

8) Обчислити

$$\bar{y}_{2,i} = -Ay_{2,i+1} + By_{2,i-1} + h(Cy_{2,i}^* + Dy_{2,i-1} - Ey_{2,i-2}),$$

де  $y_{2,i}^*$  – визначається аналогічно п. 3.

9) Визначити

$$\xi_2 = |y_{2,i} - \bar{y}_{2,i}|.$$

10) Якщо  $\xi_2 \leq \xi_{\text{доп}}$ , то привласнити  $\alpha_2 = 0$  і перейти до п. 11. При  $\xi_2 > \xi_{\text{доп}}$ , тоді, якщо  $\alpha_2 = 0$ , то привласнити  $\alpha_2 = 1$  та повторити обчислення у

відповідності до п.п. 7–10. Якщо  $\alpha_2 = 1$ , робиться висновок про те, що похибку не усунуто при перерахунку  $i$ , обчислювання або припиняються, або вносяться зміни в умови числового експерименту (найбільш ймовірна дія – заміна алгоритму перевірки).

- 11) Привласнити індексу  $j$  значення  $j = j + 1$ .
- 12) Виконати обчислення по п. 2.
- 13) Сформувати матрицю

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} y_{i-1} & \cdots & y_{i-1}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{i-k} & \cdots & y_{i-k}^* \end{bmatrix}.$$

- 14) Сформувати вектор

$$\mathbf{V} = [y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i-k+1}]^T.$$

- 15) Розв'язати систему алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{CQ} = \mathbf{V},$$

де  $\mathbf{Q} = [q_1, q_2]^T$ .

- 16) Обчислити

$$\bar{y}_{3,i+1} = q_1 y_{3,i} + q_2 y_{3,i}^*.$$

17) Визначити

$$\xi_3 = |y_{3,i+1} - \bar{y}_{3,i+1}|.$$

18) Якщо  $\xi_3 \leq \xi_{\text{доп}}$ , то привласнити  $\alpha_3 = 0$  і перейти до наступного кроку розв'язування основного алгоритму (реалізації ММ динамічної системи). При  $\xi_3 > \xi_{\text{доп}}$ , тоді, якщо  $\alpha_3 = 0$ , то замінити  $y_{3,i+1}$  на  $\bar{y}_{3,i+1}$  та привласнити  $\alpha_1 = 1$  і перейти до наступного кроку розв'язування основного алгоритму (реалізації ММ динамічної системи). Якщо  $\alpha_3 = 1$ , то робиться висновок про те, що похибку не усунуто при перерахунку  $i$ , обчислювання або припиняються, або вносяться зміни в умови числового експерименту (як і в п. 10 – заміна алгоритму перевірки).

Описаний алгоритм наведено для загального випадку. Для обраного в якості прикладної динамічної системи – первинного перетворювача сигналів акустичної емісії (датчика сигналів АЕ), при реалізації запропонованого алгоритму контролю, необхідно, в процесі обчислень у п. 2, застосовується ММ датчика сигналів АЕ у відповідності до виразу (4.8).

В такому разі, числовий експеримент щодо дослідження ППСАЕ за запропонованим алгоритмом перевірки достовірності контролю обчислювальної реалізації моделей динамічних систем, призводить до наступних результатів.

Для привласненого поточного індексу  $j = 1$ , з урахуванням ММ первинного перетворювача сигналів АЕ виду (4.8) та вектор-функції його вихідного сигналу  $y(t) = [0,182 \ 0,078 \ 0,065 \ 0,183 \ 0,679]^T$ , отриманих в розділі 4.1, обчислюємо функції  $u_{j,k}$  ( $k = \overline{1,5}$ ) у відповідності до п.2 (крок  $h$  обрано  $h = 0,2$  як і у розділі 4.1):

$$u_{1,1} = 0,2[0,182; 0,078; 0,065; 0,183; 0,679; 0,2];$$

$$u_{1,2} = 0,2[0,182; 0,078; 0,065; 0,183; 0,679; 0,2] + \\ + [0,0,91; 0,039; 0,032; 0,092; 0,34; 0,1]^T = [0,186; 0,085; 0,078; 0,279; 0,533; 0,3];$$

$$u_{1,3} = 0,2[0,182; 0,078; 0,065; 0,183; 0,679; 0,2] + \\ + [0,186; 0,085; 0,078; 0,279; 0,533; 0,3]^T = [0,287; 0,107; 0,097; 0,344; 0,726; 0,4];$$

$$u_{1,4} = 0,2[0,182; 0,078; 0,065; 0,183; 0,679; 0,2] + \\ + [0,287; 0,107; 0,097; 0,344; 0,726; 0,4]^T = [0,379; 0,123; 0,110; 0,440; 0,919; 0,5];$$

$$u_{1,5} = 0,2[0,182; 0,078; 0,065; 0,183; 0,679; 0,2] + \\ + [0,379; 0,123; 0,110; 0,440; 0,919; 0,5]^T = [0,474; 0,139; 0,123; 0,536; 1,112; 0,6].$$

Далі, використовуючи отримані значення функцій  $u_{1,k}$  ( $k = \overline{1,5}$ ), обчислюємо контрольні значення  $\bar{y}_{1,k}$  ( $k = \overline{1,5}$ ) шуканої вектор-функції:

$$\bar{y}_1 = \{\bar{y}_{1,k}\} = [0,179 \ 0,081 \ 0,069 \ 0,179 \ 0,675].$$

Для допустимої похибки  $\xi_{\text{доп}} = 0,004$  визначаємо вектор нев'язок у відповідності до п. 4:

$$\xi_1 = \{\xi_{1,k}\} = [0,003 \ 0,002 \ 0,004 \ 0,004 \ 0,004],$$

причому,  $\forall \xi_{1,i} \in \{\xi_{1,k}\} \leq \xi_{\text{доп}}, i = \overline{1,k}$ .

Оскільки умова  $\xi_{1,i} \leq \xi_{\text{доп}}$  виконується для всіх  $i = \overline{1,k}$ , то робота контрольного алгоритму  $A_k$  припиняється, а обчислення продовжуються за основним алгоритмом  $A_b$ . В разі, якщо вказана вище умова не була б задоволена, то виконання контрольного алгоритму продовжилося б у відповідності до п.п.

5–18, в результаті чого було б зроблено відповідний висновок щодо наслідків виконання контрольного алгоритму  $A_k$  та можливості подальших обчислень за основним алгоритмом  $A_b$ .

4.3 Практичні заходи організації процедур визначення точності та контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем

Основне призначення запропонованих у дисертаційній роботі методів полягає у забезпеченні (або прогнозуванні) точності, а також визначенні збоїв при числовій реалізації ММ динамічних систем (іншими словами: числовому розв'язуванні рівнянь динаміки, що складають відповідні ММ) в задачах моделювання та управління останніми. Особливу актуальність набувають ці проблеми при розв'язуванні задач моделювання та управління динамічними системами в *реальному масштабі часу*.

Оскільки як основний, так і контрольний алгоритми виконуються за різними програмами, то запропоновані методи також дозволяють виявляти і відмови застосованої обчислювальної техніки.

У тих випадках, коли в основному  $A_b$  та контрольному  $A_k$  алгоритмах частково використовуються спільні дані (наприклад, при контролі багатокрокових процедур числового розв'язування багатокроковими контрольними формулами) для підвищення достовірності контролю можуть виявитися доцільними дані, які використовуються в різних алгоритмах, зберігати у різних комірках пам'яті.

Витрати часу на контроль за алгоритмом  $A_k$  залежать від *методу контролю*, порядку точності контрольної формули (суть – контрольного алгоритму), *міри точності* обчислень і, в кінцевому підсумку, визначаються числом елементарних операцій множення та додавання по контрольному алгоритму  $A_k$ , часом визначення міри точності обчислень та часом операцій порівняння отриманого значення цієї міри точності з допустимим.

До основних *переваг* запропонованих методів визначення (прогнозування) точності та контролю достовірності обчислень при числовій реалізації ММ динамічних систем слід віднести простоту та відносно незначні витрати часу на перевірку (прогноз) точності та контроль достовірності при порівняно високій якості оцінок, що дають запропоновані методи. Причому рівень цих оцінок можна змінювати (регулювати) як зміною, зокрема, методу контролю (алгоритму  $A_k$ ), так і зміною порядку точності контрольних формул (при визначенні або прогнозі точності числової реалізації ММ динамічних систем).

Однак, тестові експерименти запропонованих алгоритмів контролю  $A_k$  виявили, в деяких випадках, появу власного «шуму», спричиненого, наприклад, неспівпадінням результатів на кроці інтегрування, отриманих по основному  $A_b$  та контрольному  $A_k$  алгоритмах, що може спричиняти погіршення точності контролю. Принагідно слід зазначити, що характеристики власного «шуму» контрольних алгоритмів  $A_k$  можуть бути вихідними даними щодо прийняття рішення при виборі останніх, а також визначення показників якості контролю. В процесі розв'язування практичних задач реальним шляхом отримання характеристик власних «шумів» контролю полягає у математичному моделюванні.

Обирання методу реалізації ММ динамічної системи за основним алгоритмом  $A_b$  та контрольним алгоритмом  $A_k$  може здійснюватися як послідовно, так і спільно. При цьому, якщо по точності та швидкодії числового розв'язування рівнянь динаміки (що особливо важливо в задачах управління, в яких управляючий вплив повинен формуватися в реальному масштабі часу) може задовольняти певна низка методів, то при обиранні конкретного з них слід орієнтуватися на отримання кращих показників якості контролю за відповідним алгоритмом  $A_k$ . Вибір режиму моделювання або управління при дослідженні алгоритмів контролю повинен проводитися з умови забезпечення необхідних показників якості контролю у будь-якому іншому режимі. Таким чином, режим повинен визначатися на основі фізичних властивостей динамічної системи, яка

моделюється (або якою здійснюється управління), та характеризуватися найменшими значеннями власного «шуму» алгоритму  $A_k$ .

Значна зміна шуканої функції на кроці реалізації ММ динамічної системи може відбутися при різкій зміні будь-якої із змінних, що входить у праву частину рівняння динаміки. Ця обставина дозволяє виявити не тільки збої та відмови обчислювальної техніки (ОТ), але і апаратури зв'язку динамічної системи (як *об'єкта управління*) з відповідними засобами ОТ, що особливо важливо при розв'язуванні задач управління.

У запропонованих методах контролю (алгоритмах  $A_k$ ) суттєво використовується та обставина, що *відома модель системи*, яка контролюється (тобто система рівнянь динаміки). Це дозволило відмовитись від застосування, зокрема, кінцевих різниць при представленні ММ досліджуваної динамічної системи у вигляді диференціальних рівнянь, а також організувати інтерполяційний контроль (оскільки при застосуванні кінцевих різниць інтерполяційний контроль складно організувати тому, що величини, яка контролюється, і яка контролює, можуть спільно використовуватися для оцінки похідних у дискретній ММ досліджуваної динамічної системи).

Запропоновані методи визначення (прогнозу) точності та достовірності реалізації ММ динамічних систем в задачах моделювання та управління ними можуть віднайти застосування також для контролю динамічних процесів, ММ яких відома. Таким чином, можна організувати, наприклад, контроль датчиків стану динамічних систем (задачі, розглянуті в розділах 4.1 та 4.2). При цьому, якщо застосовується спрощена модель динамічної системи, то можуть застосовуватися адаптивні алгоритми  $A_k$ .

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

Розглянуто досвід практичного застосування методів ранжирування за похибкою та контролю достовірності обчислювальної реалізації ММ динамічних систем в задачах їх моделювання та управління. В якості типового прикладу динамічної системи при дослідженнях було обрано перетворювач сигналів акустичної емісії (ППСАЕ), що застосовується в системах неруйнівного контролю технічних об'єктів, і для якого було розроблено ММ у вигляді інтегрального рівняння Вольтерри II роду.

Виконано прогнозне оцінювання точності моделювання первинного перетворювача сигналів АЕ, яке, на підставі запропонованого методу ранжирування похибки, дало змогу отримати оцінку неусувної похибки визначення вектору шуканої функції вихідної координати ППСАЕ (тобто сигналу про наявність дефекту механічної конструкції) з ймовірністю отримання вірного розв'язку не нижче 0,96.

Розроблено, орієнтовані на застосування у практичних розрахунках, завадостійкі алгоритми числового розв'язування рівнянь, що являють собою ММ динамічних систем. Числовий експеримент застосування завадостійкого алгоритму реалізації ММ первинного перетворювача сигналів АЕ дав змогу отримати вектор нев'язок для допустимої похибки  $\xi_{\text{доп}} = 0,004$ .

Розроблено практичні заходи організації процедур визначення точності та контролю достовірності обчислювальної реалізації ММ динамічних систем. При цьому було зазначено, що основними перевагами запропонованих методів визначення (прогнозування) точності та контролю достовірності обчислень при числовій реалізації ММ динамічних систем є простота та відносно незначні витрати часу на перевірку (прогноз) точності та контроль достовірності при порівняно високій якості оцінок, що дають запропоновані методи.

## ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі вирішено важливу науково-практичну задачу, яка полягає у розробці методів прогнозування точності і аналізу достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем, представлених у класах диференціальних та інтегральних рівнянь – при розв’язуванні прикладних задач моделювання і управління на їх основі, шляхом визначення показників якості задіяних комп’ютерних та програмно-алгоритмічних інструментальних засобів.

В тому числі отримано наступні теоретичні та практичні результати:

Виконано аналіз існуючих підходів до математичної формалізації динамічних систем в задачах їх моделювання і управління, в результаті чого показано особливості опису динамічних систем моделями у вигляді диференціальних та інтегральних рівнянь різних типів.

Проведено аналіз методів числової реалізації диференціальних та інтегральних рівнянь як найбільш поширених ММ динамічних систем, а також похибок, які виникають при цьому.

Запропоновано метод ранжирування за похибками при реалізації ММ динамічних систем в задачах моделювання та управління ними. Метод ґрунтується на використанні запропонованих аналітичних оцінок у вигляді нерівностей і є економічним (в смислі трудомісткості обчислень) та достатнім (за абсолютними значеннями) для подальшого аналізу, а також прийняття рішення щодо оцінки точності отриманого розв’язку. При цьому ранжирування похибок відбувається у вигляді  $p$ -квartilів (що являють собою рівновеликі групи значень, впорядковані від мінімального до максимального) відповідних функцій розподілу  $\|\varepsilon_0\|_i$  ( $i$  – номер квартилю), які дозволяють із ймовірністю  $p$  будувати оцінки границь довірливості для похибок.

Запропоновано оцінки «знизу» функцій розподілу неусувної похибки реалізації ММ динамічних об’єктів, представлених у класах диференціальних та

інтегральних рівнянь, та орієнтованих на задачі моделювання та управління із застосуванням методу ранжирування за похибкою. Зазначені оцінки, в свою чергу, ґрунтуються на застосуванні гарантованих оцінок для абсолютних та відносних похибок, що виникають при числовій реалізації ММ динамічних систем, зокрема, апіорних та апостеріорних оцінках законів розподілу неусувної похибки.

Запропоновано методи алгоритмічного контролю (екстраполяційний та інтерполяційний), що являють собою реалізацію методу зі зростаючою точністю обчислень при числовому розв'язуванні рівнянь динаміки в задачах моделювання динамічних систем та управління ними. Методи базуються на застосуванні контрольного алгоритму, який виконується на етапі числового розв'язування поставленої (основної) задачі, але такого, що простіший за основний. Зокрема, екстраполяційний метод дозволяє досягнути підвищення достовірності обчислень за рахунок застосування в контрольному алгоритмі інформації, яку вже проконтрольовано на попередніх кроках основного алгоритму, а інтерполяційний – дозволяє організувати неявний контроль, що дає змогу зменшити діапазон відхилення величини, яка контролюється, по відношенню до контрольної (іншими словами досягається зменшення «шуму» отриманого розв'язку рівнянь динаміки при різних вхідних даних).

Розроблено критерії визначення наявності або відсутності похибки в основному алгоритмі числової реалізації ММ динамічної системи, що дає змогу виявляти збої в роботі основного обчислювального алгоритму. На підставі розроблених критеріїв запропоновано адаптивні методи (та реалізуючі їх алгоритми) контролю достовірності числового розв'язування рівнянь динаміки при дослідженні динамічних систем. Причому, запропоновані адаптивні методи забезпечують визначення параметрів контрольного алгоритму з умови мінімуму обраної міри близькості результатів, отриманих за контрольним та основним алгоритмах числової реалізації ММ динамічних систем.

Розглянуто досвід практичного застосування методів ранжирування за похибкою та контролю достовірності обчислювальної реалізації ММ динамічних систем в задачах їх моделювання та управління. Тестові дослідження запропонованих методів виконано на прикладі перетворювача сигналів акустичної емісії (ППСАЕ), що застосовується в системах неруйнівного контролю технічних об'єктів, і для якого було розроблено ММ у вигляді інтегрального рівняння Вольтерри II роду. Застосування у прикладних розрахунках розроблених методів прогнозування точності та достовірності числової реалізації ММ динамічних систем показали можливість забезпечення бажаної точності обчислень, а також зменшення у (1,4...2,5) рази кількість збоїв в процесі розв'язування реальних задач моделювання динамічних систем та управління ними.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Law A. M., Kelton W. D. Simulation Modeling and Analisings Simulation. New York : Mc Graw-Hill Publishing Co, 2000. 560 p.
2. Banks J., Carson J., Nelson B. L. Discrete Event System Simulation. S. I. : Prentice Hall, 2001. 594 p.
3. Ловейкін В. С., Ромасевич Ю. О. Теорія технічних систем. К. : ЦП „КОМПРИНТ”, 2017. 291 с.
4. Згуровський М. З., Панкратова Н. Д. Основи системного аналізу. К. : ВНУ, 2007. 544 с.
5. Тимченко А. А. Основи системного проектування та системного аналізу об'єктів / за ред. Ю. Г. Леги. К. : Либідь, 2004. 288с.
6. Томашевський В. М. Моделювання систем. К.: Видавнича група ВНУ, 2005. 349 с.
7. Математичне моделювання систем та процесів / Павленко П. М., Філоненко С. Ф., Чередніков О. М., Трейтяк В. В. К. : НАУ, 2017. 392 с.
8. Object-oriented modelling and design / Rumbauhg J. et al. New Jersey : Prentice Hall, 1991. 500 p.
9. Schriber T. J., Brunner D. T. Inside Discrete Event simulation software: hot it works and why it matters. *Proceedings of the 1999 Winter Simulation Conference*. S. J., 1999. P. 72–84.
10. Стоян В. А. Моделювання та ідентифікація динаміки систем із розподіленими параметрами. К. : Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2003. 187с.
11. Виклюк Я. І., Пасічник В. В. Моделювання складних систем. Львів : Видавництво “Новий Світ –2000”, 2020. 404 с.
12. Дубовой В. М. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів і систем керування. Вінниця : ВНТУ, 2012. 308 с.
13. Попов В. В. Методи обчислень. К. : ВПЦ “Київський університет”, 2012. 303 с.

14. Оптимізація режимів активної ідентифікації динамічних об'єктів / Бойкова В. О., Мирунко В. М., Сільвестров А. М., Спінул Л. Ю. *Адаптивні системи автоматичного управління*, 2005. № 8 (28). С. 116–122.
15. Григорків В. С., Григорків М. В. Оптимізаційні методи та моделі. Чернівці : ЧНУ, 2016. 400 с.
16. Голінко І. М., Кубрак А. І. Моделювання та оптимізація систем керування. Кам'янець-Подільський : ПП Буйницький, 2012. 262 с.
17. Жученко А. І., Ладієва Л. Р., Дубік Р. М. Динамічна оптимізація з використанням MATLAB та SIMULINK. К. : СПД Моляр, 2010. 210 с.
18. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. К. : Видавнича група ВНУ, 2006. 480 с.
19. Прокоф'єв А. Ю. Аналіз похибок математичного моделювання динамічних об'єктів, які описуються інтегральними рівняннями. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2022. Т. 12, № 3. С. 209–219. DOI 10.15276/imms.v12.no3.209. – URL: <http://immm.opu.ua/#a23>; [http://immm.opu.ua/files/archive/n3\\_v12\\_2022/immm\\_n3\\_v12\\_2022.pdf](http://immm.opu.ua/files/archive/n3_v12_2022/immm_n3_v12_2022.pdf).
20. Прокоф'єв А. Ю. Метод точнісного тарювання при реалізації математичних моделей динамічних систем в задачах моделювання та управління. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*, 2022. Вип. 23. С. 116–129. DOI 10.326226/2308-5916.2022-23.116-129. – URL: <http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/issue/archive>.
21. Лись Д. А., Прокоф'єв А. Ю. Розробка та числова реалізація математичної моделі гравітаційної хвилі на границі поділу двошарової рідинної системи. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2023. Т. 13, № 1–2. С. 97–103. DOI 10.15276/imms.v13.no1-2.97. URL: <http://immm.opu.ua/#a23>; [http://immm.opu.ua/files/archive/n3\\_v12\\_2022/immm\\_n1-2\\_v13\\_2023.pdf](http://immm.opu.ua/files/archive/n3_v12_2022/immm_n1-2_v13_2023.pdf).
22. Прокоф'єв А. Ю. Дослідження показників точності моделей нелінійних динамічних систем. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*, 2023. Вип. 24. С. 56–67.

DOI: 10.32626/2308-5916.2023-24.56-67. – URL: <http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/issue/archive>.

23. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Моделі визначення надійності динамічних систем, функціонування яких характеризується режимом профілактики. *Вчені записки ТНУ ім. В. І. Вернадського. Серія: Технічні науки*, 2024. Т. 35 (74), № 1. С. 280–286. DOI <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2024.1.1/42>. – URL: <https://www.tech.vernadskyjournals.in.ua/35-74-1>.

24. Polozhaenko S. A., Prokofiev A. Yu. Estimation of Accuracy Indicators of Nonlinear Dynamic Systems. *Colloquium-journal*. Part 1, 2024. № 15 (208). P. 61–64. DOI: 10.24412/2520-6990-2024-15208-61-63. – URL: <https://colloquium-journal.org/wp-content/uploads/2024/06/Colloquium-journal-2024-208-1.pdf>.

25. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Параметри методу Рунге-Кутти з різним порядком точності при інтегруванні рівнянь динаміки в задачах моделювання нестационарних систем. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2024. Т. 14, № 1-2. С. 85–96. DOI 10.15276/imms.v14.no1-2.85. – URL: [http://immm.op.edu.ua/files/archive/n1-2\\_v14\\_2024/immm\\_n1-2\\_v14\\_2024.pdf](http://immm.op.edu.ua/files/archive/n1-2_v14_2024/immm_n1-2_v14_2024.pdf).

26. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Параметрична редукція по точності математичних моделей динамічних об'єктів систем. *Вісник Кременчуцького національного університету ім. М. Остроградського*, 2024. Вип. 6 (149). С. 125–131. DOI <https://doi.org/10.32782/1995-0519.2024.6.15>. URL: [https://visnikkrnu.kdu.edu.ua/visnik.php?id\\_nom=71](https://visnikkrnu.kdu.edu.ua/visnik.php?id_nom=71).

27. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Методи контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем, засновані на застосуванні контрольних алгоритмів. *Вісник Херсонського національного технічного університету*, 2025. Вип. 1 (92). Ч. 2. С. 185–193. DOI <https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2025.1.2.25>. URL: [https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk\\_kntu/issue/view/72](https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk_kntu/issue/view/72).

28. Прокоф'єв А., Баранов М. Аналіз і моделювання аномальних дифузійних процесів з просторово-часовими характеристиками. *Scientific Paradigm in the Context of Technologies and Society Development: proceedings of the 5<sup>th</sup> International Scientific and Practical Conference, Geneva, 16-18 May 2023*. P. 454–458.

URL: <https://archive.interconf.center/index.php/conference-proceeding/issue/view/16-18.05.2023/164>

29. Лись Д. А., Прокоф'єв А.Ю. Моделювання динамічного стану ударних хвиль у парорідинних двофазних системах. *Сучасні Інформаційні Технології 2023: матеріали XIII міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених, м. Одеса, 18–19 травня 2023 р. Одеса, 2023*. С. 159–161.

URL: [https://drive.google.com/file/d/1ERFn923\\_zrEXiPcGj8S0dbSb4K6ToDE/view](https://drive.google.com/file/d/1ERFn923_zrEXiPcGj8S0dbSb4K6ToDE/view).

30. Use of dynamic neural networks for modelling nonlinear objects with significant nonlinearity / Polozhaenko S., Fomin O., Krikun V., Orlov A., *Prokofiev A. Математика та інформатика в науці й освіті: виклики сучасності: збірник тез IV Міжнародної науково-практичної Інтернет-конференції, м. Вінниця, Мау 25–26 травня 2023 р., Вінниця, 2023*. С. 121–124.

URL: <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/791>

31. Use of Dynamic Neural Networks for Modeling Nonlinear Objects with Significant Nonlinearity / Fomin O., Polozhaenko S., Krikun V., Orlov A., *Prokofiev A. Annals of Computer Science and Intelligence System, Volume 37: preceding 18th Conference on Computer Science and Intelligence Systems. Warsaw, 17–20 September 2023, Warsaw, 2023*. P. 97–102. DOI: [10.15439/2023F3874](https://doi.org/10.15439/2023F3874).

URL: <https://annals-csis.org/proceedings/2023/drp/3874.html>

32. Прокоф'єв А. Ю., Положаєнко С. А. Підвищення якості процесу моделювання динамічних систем на основі методу точностного тарування. *Проблеми та перспективи реалізації та впровадження міждисциплінарних*

наукових досягнень: матеріали VI Міжнародної наукової конференції, м. Біла Церква, 2 лютого 2024 р., Вінниця: ТОВ «УКРЛОГОС Груп, 2024. С. 155–160. DOI: <https://doi.org/10.36074/mcnd-02.02.2024>. URL: <https://archive.mcnd.org.ua/index.php/conference-proceeding/issue/view/02.02.2024/52>.

33. Метод ранжирування за похибкою для оцінювання точності розв'язування задач моделювання динамічних систем / Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю., Літинський В. В., Татарин О. В. *Сучасні інформаційні та електронні технології: твори XXV Міжнародної науково-практичної конференції*, м. Одеса, 27–29 травня 2024 р. Одеса, 2024. С. 15–16. URL: <https://www.old.tkea.com.ua/siet/archive/2024/15.pdf>.

34. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Оцінювання розв'язків задач моделювання динамічних систем на основі методу ранжування за похибкою. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей 10-ї Міжнародної наукової конференції*. м. Кам'янець-Подільський, 28–29 червня 2024 р., Кам'янець-Подільський, 2024. С. 104–105. URL: <http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/8145>.

35. Improving measurements accuracy in weight-in-motion systems using dynamic neural networks / Oleksandr Fomin, Sergii Polozhaenko, Petro Bidyuk, Oleksii Tataryn, Andrii Prokofiev. *Information Control Systems & Technologies (ICST 2024): proceedings of the 12th International Conference*, Odesa, 23–25 September, 2024. Odesa, 2024 P. 483–493. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-3790/paper42.pdf>. (Scopus).

36. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Адаптивний метод контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем в процесах їх моделювання та управління. *Development Priorities for Technical Sciences in the Modern World: proceedings International scientific conference*, Riga, 19–20 March 2025, Riga, 2025. P. 35–39. DOI <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-542-6-9> URL: <http://baltijapublishing.lv/omp/index.php/bp/catalog/book/578>.

37. Репета В. К. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2. К. : НАУ, 2014. 504 с.
38. Мартиненко М. А., Юрик І. І. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення: навч. посібник 2-ге видання. К. : Видавничий дім «Слово», 2008. 296 с.
39. Schiff J. L. The Laplace transform. Theory and Applications. New York : Springer-Verlag, 1999. 245 p.
40. Лопушанський А. О., Шарин С. В. Застосування перетворення Лапласа узагальнених функцій повільного росту до побудови функціонального числення. *Український математичний журнал*, 2015. Т. 67. № 11. С. 1498–1511. URL: <http://jnas.nbu.gov.ua/article/UJRN-0000790478>.
41. Теорія автоматичного управління: у двох частинах. Ч. 1: Лінійні безперервні системи: навчальний посібник для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / уклад.: С. О. Бобріков, С. А. Положаєнко. Одеса : Екологія, 2017. 164 с.
42. Коваленко І. В., Малиновський В. В.. Основні процеси, машини та апарати хімічних виробництв: Підручник. К. : Інрес: Воля, 2005. 264 с.
43. Онищук О. О., Кормош Ж. О. Процеси та апарати хімічних виробництв: курс лекцій. Луцьк : Вежа-Друк, 2020 155 с.
44. Процеси та обладнання хімічної технології: підручник / Я. М. Корнієнко та ін. К. : НТУУ „КПІ ім. І. Сікорського”, 2011. Ч.1 300 с., Ч.2 416 с.
45. Теплові й масообмінні процеси та обладнання хімічних і нафтогазопереробних виробництв у системах «газ (пара)–рідина» : підручник / Я. Е. Михайловський та ін., за заг. ред. Я. Е. Михайловського. Суми : СумДУ, 2021. 391 с.
46. Ghasem N., Henda R. Principles of Chemical Engineering Processes. Material and Energy Balances. 2nd edition updt. CRC. New Work : Press Taylor & Francis Group, 6000 Broken Sound Parkway, 2015. 431 p.

47. Чуйко Г. П., Дворник О. В., Яремчук О. М. Математичне моделювання систем і процесів : навч. посіб. Миколаїв : Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2015. 244 с.
48. Іванов О. Я., Василенко В. О. Математична модель динаміки чисельності популяції з урахуванням зміни ємності середовища та зміни коефіцієнтів приросту. *Фізика живого*, 2008. Т. 16. № 2. С. 172–176.
49. Краєвський В. О., Михалевич В. М. Взаємозв'язок теорії підсумовування пошкоджень із задачею про таутохрону. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, 2016. № 5. С. 85–92.
50. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння. К. : Либідь, 2004. 408 с.
51. Федак І. В., Гой Т. П. Лінійні інтегральні рівняння: навч. посіб. Івано-Франківськ : Голіней, 2011. 152с.
52. Головенко А. Д., Голубєв С. А., Чорний Д. І. Обчислювальні особливості нестационарних аеродинамічних задач. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*, 2011. Т. 104. №1. С. 24–39.
53. Бондаренко В. Г. Рівняння математичної фізики. К. : НТУУ „КПІ ім. І. Сікорського”, 2018. 100 с.
54. Eidelman S. D., Kochubei A. N. Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type. Springer : Basel AG, 2004. 386 p.
55. Вайсфельд Н. Д., Реут В. В. Рівняння математичної фізики: навч.-метод. посібн. для студ. спец. «Прикладна математика». Одеса : Одеськ. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2018. 194 с.
56. Методи математичної фізики / Піх С. С., Попель О. М., Ровенчак А. А., Тальянський І. І. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2011. 402 с.
57. Вакарчук І. О. Квантова механіка. 4-е видання, доповнене. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2012. 872 с.
58. Федоренко А. М. Квантова механіка, термодинаміка і статистична фізика. К. : Вища школа, 1993. Т. 2. 415 с.

59. Юхновський І. Р. Основи квантової механіки. К. : Либідь, 2002. 392 с.
60. Саврук М., Матвісів О. Динамічна задача для тіла з тріщиною за антиплоскої деформації. Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: під заг. ред. В. В. Панасюка. Львів : ФМІ НАН України, 2004. С. 255–260.
61. Попов В. Г., Мойсеєнок О. П. Розв'язання динамічної антиплоскої задачі для тіла з включенням методом скінченних різниць за часом. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*, 2005. Т. 41. № 4. С. 19–25.
62. Онишко Л., Сенюк М. Плоска динамічна осесиметрична задача для порожнистого двошарового циліндра. Сучасні проблеми механіки та математики: в 3-х т. Львів : ІППММ НАН України, 2008. Т. 2. С. 159–161.
63. Кравець В. С. Метод сингулярних інтегро-диференційних рівнянь у плоских динамічних задачах механіки руйнування. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*, 2010. № 2. С. 95–110.
64. Муравський І. О. Інтегральні рівняння Вольтерра та Фредгольма зі змінними межами і їх застосування в гідродинаміці. Львів : Світ, 2007. 344 с.
65. Пономаренко О. В., Черненко В. М. Інтегральні рівняння Вольтерра та Фредгольма зі змінними межами та їх застосування. К. : Вища школа, 2015. 480 с.
66. Сидоренко М. І. Інтегральні рівняння зі змінними межами та їх застосування. К. : Вища школа, 1989. 224 с.
67. Шкляр А. А. Теорія інтегральних рівнянь. К. : Київський університет, 2006. 208 с.
68. Коновал О. А. Основи електродинаміки: навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів. Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. 347 с.

69. Ковальчук О. Я. Розв'язання інтегральних рівнянь в аеродинамічних дослідженнях з допомогою теплицевих матриць. *Вісник Тернопільського держав. технічного ун-ту*, 2007. Т. 12. № 3. С. 146–156.
70. Бродин О. М. Теоретична фізика. Квантова механіка. К. : РЕЕУ “КПІ ім. І. Сікорського”, 2022. 233 с.  
URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/fe113466-ee5c-41e3-beb2-0d4edda8d9df/content>.
71. Вакарчук І. О. Квантова механіка. Львів : Вид. Львівського ун-ту, 2004. 616 с.
72. Основи лінійної теорії пружності, пластичності та повзучості: навч. посібник / Е. Д. Чихладзе та ін. Харків : УкрДАЗТ, 2010. 149 с.
73. Мироненко М. І. Інтегральні перетворення в теорії пружності. Харків : РЦНІТ, 2003. 439 с.
74. Горев Л. М. Основи моделювання в гідро екології: підручник. К. : Либідь, 1996. 336 с.
75. Технології обробки та моделювання екологічної інформації / Мокін В. Б., Поплавський А. В., Яцолт А. Р., Боцула М. П. Вінниця : ВНТУ, 2015. 130 с.
76. Заграй Я. М., Котовенко О. А. Моделювання і прогнозування стану довкілля. URL: <http://manualsem.com/book/577-modelyuvannya-iprognozuvannya-stanu-dovkillya/2-anotaciya.html>
77. Ромащенко М. І., Коломієць С. С., Білоброва А. С. Система діагностування водно-фізичних властивостей ґрунтів. *Меліорація і водне господарство*, 2019. №2. С. 199–208. DOI:10.31073/mivg201902-193.
78. Надточій П. П., Вольвач Ф. В, Гермашенко В. Г. Екологія ґрунту та його забруднення. К. : Аграрна наука, 1989. 287 с.
79. Коломієць С. С. Екологічна характеристика ґрунту та ґрунтових рідин. *Вісник аграрної науки*, 1999. №12. С.9–13.
80. Карвацький, А. Я. Механіка суцільних середовищ. К. : НТТУ “КПІ ім. І. Сікорського”, 2016. 290 с.

URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/81629729.pdf>.

81. Співак А. Я., Герасимов О. І. Механіка суцільних середовищ. Одеса : ОДЕКУ, 2008. 63 с. URL:<http://eprints.library.odeku.edu.ua/id/eprint/547>
82. Сяський А. О., Бабич С. М. Механіка суцільного середовища : навч. посіб. Рівне : Ред.-видав. відділ РДГУ, 2014. 165 с.
83. Хомик Н. І., Довбуш Т. А., Рубінець Н. А. Опір матеріалів та основи теорії пружності і пластичності. Тернопіль : ФОП Паляниця В. А., 2017. 232с.
84. Бабенко В. М., Черненко В. М. Інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерри зі змінними межами і метод функцій ядра. К. : Вища школа, 1989. 176 с.
85. Пономаренко О. В., Черненко В. М. Інтегральні рівняння Вольтерри та Фредгольма зі змінними межами та їх застосування. К. : Вища школа, 2015. 480 с.
86. Мороз В. І., Уханська О. М. Дискретизація інтегралу згортки за допомогою модифікованого z-перетворення. *Математичне та комп'ютерне моделювання, Серія: Технічні науки*, 2017. Вип. 16. С. 79–90.
87. Polozhaenko S. A., Ryvovar O. V. Features of Creating Information Technologies Focused on the Research of Diffusion Processes. *Informatics and Mathematical Methods in Simulation*, 2020. Т. 10. № 1-2. Р. 5–10. DOI [10.15276/imms.v10.no1-2.5](https://doi.org/10.15276/imms.v10.no1-2.5).
88. Положаєнко С. А., Лись Д. А. Моделювання хвильових процесів у газорідних системах. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*, 2021. Вип. 22. С. 88–96. DOI: [10.32626/2308-5916.2021-22.88-96](https://doi.org/10.32626/2308-5916.2021-22.88-96).
89. Polozhaenko S., Lys D. Modeling of wave processes in two-phase gas-liquid systems. *Colloquium-journal*. 2021. Part 1. № 32 (119). Р. 37–41. DOI: [10.24412/2520-6990-2021-32119-37-41](https://doi.org/10.24412/2520-6990-2021-32119-37-41).
90. Положаєнко С. А., Фомін О. О. Метод розв'язування задачі параметричної ідентифікації математичних моделей процесів фільтрації

аномальних рідин у пористих середовищах. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2014. Т. 4. №3. С. 219–224.

91. Polozhaenko S. A., Kuznitshenko S. D. Mathematical models of unequivalent technological processes as variation inequalities and their calculable realization on the basis of methods of optimization. *Electrotechnic and computer systems*, 2012. No 05(81). С. 164–169.

92. Polozhaenko, S., Porpulis A., Kontreras D. A Method for solving variational inequalities of class that uses the optimization setting of the original problem. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2012. Т. 2. № 1. С. 28–36.

93. Polozhaenko S. A., Grigorenko Yu. V., Babiychuk O. B. Qualitative analysis of identification problem for water-oil reservoirs by parameters of mathematical model settings. *Electrotechnic and computer systems*, 2013. No 09(85). P. 89–97.

94. Чисельні методи в комп'ютерних науках / Андруник В. А. та ін. Львів : Вид-во «Новий світ – 2000», 2017. 470 с.

95. Методи обчислень : Частина 1. Чисельні методи алгебри / уклад.: В. В. Третиник, Н. Д. Любашенко. К. : НТТУ “КПІ ім. І. Сікорського”, 2019. 138 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/28225>.

96. Чисельні методи: навч. посіб. / Волонтир Л. О., Зелінська О. В., Потапова Н. А., Чіков І. А.. Вінниця : ВНАУ, 2020 322 с.

97. Лященко М. Я., Головань М. С. Чисельні методи: підручник. К. : Либідь, 1996. 288 с.

98. Everitt B., Hothorn A. Hndbook of statistical analyses using. New York : Chapman and HALLICRC, 2009. 376 p.

99. Мусіяка В. Г. Основи числових методів. Дніпро : ЛІРА, 2017. 256 с.

100. Семеріков С. О. Еволюція та сучасний стан курсу чисельних методів. *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського держав.*

*педагогічного ун-ту: Серія педагогічна. Вип. 8 : Дидактики дисциплін фізико-математичної та технологічної освітніх галузей, 2002. С. 189–193.*

101. Ясев О. Г., Расчубкін В. Г. Моделювання динаміки технічних систем з використанням пакета програм Mathcad: навч. посіб. Дніпропетровськ : НМетАУ, 2011. 76 с.

102. Butcher J. Numerical Method for Ordinary Differential Equations. John Willey & Sons Ltd, 2008. 482 p.

103. Famelis I. Th., Papakostas S. N., Tsitouras Ch. J. Symbolic derivation of Runge–Kutta order conditions. *Symbol. Comput*, 2004. Vol. 37. P. 311–327.

104. Дмитрієва О. А., Купрій А. Я. Формування умов порядку методів Рунге-Кутти. *Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія*, 2012. №3. С. 86–90.

105. Новотарський М. А. Алгоритми та методи обчислень. К. : НТТУ “КПІ ім. І. Сікорського”, 2019. 274 с. URL: [https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/27864/1/Alhorytmy\\_ta\\_metody\\_obchislenn.pdf](https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/27864/1/Alhorytmy_ta_metody_obchislenn.pdf)

106. Tatueva A. Semi-Implicit and Semi-Explicit Adams-Bashford-Mouton Methods. *Mathematics*, 2020. Vol. 8. No 5. P. 780–795.

107. Крохмальова Т. П., Величко В. Є. Розв'язання некоректно поставлених задач. *Збірник наукових праць фізико-математичного фак.-ту СДПУ*, 2011. Вип. 3. С. 44–48.

108. Дюкарев Ю. М., Літвінова О. Г. Диференціальні й інтегральні рівняння та варіаційне числення. Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2010. 138 с.

109. Polyanin A. D., Manzhirov A. V. Handbook of Integral Equations. NY : CRC Press LLC, 1998. 796 p.

110. Artykova J. A., Yuldashev T. K. Volterra functional integral equation of the first kind with nonlinear right-hand side and variable limits of integration. *Український математичний журнал*, 2006. Т. 58. № 9. С. 1285–1288.

111. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні та інтегральні рівняння : навч. посіб. Вид. 2-ге, випр. та доп. Тернопіль : Навчальна книга, 2014. 360 с.

112. Engl H., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. London : Kluwer, 1996. 492 p.

113. Семенов В. В., Чабак Л. М. Новий варіант регуляризації методів екстраградієнтного типу. *Доповіді Національної академії наук України*, 2014. № 10. С. 45–50.

114. Adamson Iain T. Elementary Rings and Modules. Edinburgh : Oliver and Boyd, 1972. 136 p.

115. Derkach V. A., Hassi S., Malamud M. M. Generalized resolvents and admissibility. *Methods Funct. Anal. Topol*, 2000. Vol. 6. No 3. P. 24–55.

116. Pihura O., Storozh O. Resolvent and conditions of solvability for proper extensions of linear relation in Hilbert space. *Visnyk of the Lviv Univ: Series Mech. Math*, 2016. Vol. 82. P. 174–186.

117. Pearson R. K., Ogunnaike B. A., Doyle F. J. Identification of structurally constrained second-order Volterra models. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1996. Vol. 44. No 11. P. 2837–2846.

118. Franz M. O., Scholkopf B. A unifying view of Wiener and Volterra theory and polynomial kernel regression. *Neural Computation*, 2006. Vol. 18 (12). P. 3097-3118.

URL: <http://www.mitpressjournals.org/doi/pdf/10.1162/neco.2006.18.12.3097>.

119. Volterra Series Approximation of a Class of Nonlinear Dynamical Systems Using the Adomian Decomposition Method / Guo Yuzhu et al. *Nonlinear Dynamics*, 2013. Vol. 74. Issue 1–2. P. 359–371.

120. Карнаухова Т. В., Зражевська В. Ф., Могильова В. В. Диференціальні рівняння та системи. К. : НТУУ “КПІ ім. І. Сікорського”, 2014. 280 с.

121. Самкова Г. Є., Шарай Н. В., Мойсеєнок О. П. Звичайні диференціальні рівняння та системи звичайних диференціальних рівнянь. Одеса : Одес. націон. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2019. 112 с.

122. Охріменко, М. Г., Жуковська О. А., Купка О. О. Методи розв'язування некоректно поставлених задач. К. : Центр учбової літератури, 2008. 166 с.
123. Охріменко М. Г., Фартушний І. Д., Кулик А. Б. Некоректно поставлені задачі та методи їх розв'язування: підручник. К. : В-во «Політехніка», 2014. 225 с.
124. Engl H., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. London : Kluwer, 1996. 376 p.
125. Солодкий С. Г. Оптимальні методи розв'язування жорстко некоректних задач. *Питання оптимізації обчислень* : матеріали міжнар. наук. конф., м. Кацивелі, 23-28 вересня 2007 р., К., 2007. С. 121.
126. Florack, L. Mathematical Methods for Signal and Image Analysis and Representation / L. Florack et al. New York : Springer London Dordrecht Heidelberg, 2012. 316 p.
127. Верлань А. Ф., Сізіков В. С., Мосенцова Л. В. Регуляризація багатовимірної задачі підвищення дозвільної спроможності антени на основі методу модельних експериментів. *Електронне моделювання*, 2013. Т. 35. № 1. С. 3-13
128. Engl H. W., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. Dordrecht: Kluwer, 1996. 328 p
129. Nashed M. Z., Scherzer O. Least Squares and Bounded Variation Regularization with Nondifferentiable Functional. *Number funct. anal. and optimiz*, 1998. Vol. 19. No 7, 8. P. 873–901.
130. Vasin V.V., Korotkii A. S. Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functional. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2007. Vol. 15. No 8. P. 853–865.
131. Derkach V. A., Malamud M. M., de Snoo H.S.V. Generalized resolvents and admissibility. *Methods Funct. Anal. Topol*, 2000. 6, 3. P. 24–55.
132. Василюшин Т. В., Гой Т. П., Федак І. В. Інтегральні рівняння. Івано-Франківськ : Сімик, 2014. 222 с.

133. Іванов А. О. Теорія автоматичного керування : підручник. Дніпропетровськ : Націон. гірничий ун-т, 2003. 250 с.
134. Папушин Ю. Л., Білецький В. С. Основи автоматизації гірничого виробництва. Донецьк : Східний видавничий дім, 2007. 168 с.
134. Попович, М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування: підручник. К. : Либідь, 1997. 544 с.
135. Ладанюк А. П. Теорія автоматичного керування. К. : НУХТ, 2004. 174 с.
136. Самотокін Б. Б. Лекції з теорії автоматичного керування: навч. посіб. Житомир : ЖІТІ, 2001. 508 с.
137. Зайцев Г. Ф., Стеклов В. К., Бріцький О. І. Теорія автоматичного управління: навч. посіб. К. : Техніка, 2002. 688 с.
138. Кондратенко Ю. П., Кондратенко Г. В. Системи управління: Збірник завдань до практичних занять: навч. посіб. Миколаїв : МДГУ ім. П. Могили, 2006. 84 с.
139. Денисенко В. А., Бобріков С. О., Гончаренко О. С. Теорія автоматичного управління: навч. посіб. для студентів вузів. Одеса : Одеська державна академія холоду, 2010. 100 с.
140. Головач Г. П., Калайда О.Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь К. : Техніка, 1997. 288 с.
141. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні та інтегральні рівняння. Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 356 с.
142. Дюкарев Ю. М., Літвінова О. Г. Диференціальні й інтегральні рівняння та варіаційне числення. Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2010. 138 с.
143. Цегелик. Г. Г. Наближені методи розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними та інтегральних рівнянь. Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2008. 140 с.

144. Теорія автоматичного управління: навч. посіб. / уклад.: О. Й. Штіфзон, П. В. Новіков, В. П. Бунь. К. : НТТУ “КПІ ім. І. Сікорського”, 2020. 144 с. URL: <https://ela.kpi.ua/items/611b2cab-c341-4dfb-a4ea-e2c836c457ac>
145. Astrom K. J., Hagglund T. Advanced PID Control. Instrumentation, Systems, and Automation Society. New York : Chapman and HALLICRC, 2006. 250 p.
146. Теорія автоматичного керування. Частина 1: Моделювання лінійних систем автоматичного управління / уклад.: А. А. Марченко, Д. В. Настенко, В. С. Гулий. К. : НТТУ “КПІ ім. І. Сікорського”, 2016. 55с. URL: <https://ela.kpi.ua/items/d16a5a4b-3dc0-4533-8abc-271c7ea59e5f>.
147. Гоголюк П. Ф., Гречин Т. М. Теорія автоматичного керування: підручник. Львів : Вид-во Націон. ун-ту «Львівська політехніка», 2008. 285 с.
148. Колесницький О. К., Арсенюк І. Р., Месюра І. Р. Чисельні методи : навч. посіб. Вінниця: ВНТУ, 2017. 130 с.
149. Мотигін В. В., Роптанов В. І., Дудатьєв А. В. Чисельні методи в інженерних дослідженнях. Частина І. Теоретичні відомості. Вінниця : ВНТУ, 2004. 102 с.
150. Гетьманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування: навч. посіб. К. : Либідь, 2001. 256 с.
151. Жалдак, М. І., Рамський Ю. С. Чисельні методи математики. К. : Вища школа, 1984. 206 с.
152. Кравцова Л. В. Лекції з дисципліни Чисельні методи. URL: <http://dls.ksu.kherson.ua/dls/Library/LibdocView.aspx?id=bbd94fad-a930-49da-952c-df2838670a5b>
153. Лопушанська Г. П., Лопушанський А. О. Інтегральні рівняння і застосування. Львів : Вид-во Львівського націон. ун-ту ім. І. Франка, 2022. 111 с.
154. Molabahrami, A. An approach to the Feedhole integrodifferential equations by using IMVM. *The extended abstract of the 5th seminar of Numerical*

*analysis and its applications*: Vali-o-Asr University of Rafsanjan, Iran, 9-10 Sep., 2014. Rafsanjan, 2014. P. 275–278.

155. Олецкий О. В. Адаптивна регуляризація розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма першого роду на основі розкладу Карунена-Лоева. *Наукові записки НаУКМА: Комп'ютерні науки*, 2000. Т. 18. С. 37–40.

156. Засядько А. А. Символічні моделі фізичних процесів, що описуються інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду. *Системи обробки інформації*, 2019. Вип. 2 (157). С. 45–56. DOI: [10.30748/soi.2019.157.06](https://doi.org/10.30748/soi.2019.157.06).

157. Шелестовський Б., Габрусев Г. Методика регуляризації інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду. *Матеріали XV наукової конференції ТНТУ ім. І. Пулюя*. Тернопіль, 2011. С. 168–170.

158. Гарт Л. Л. Проекційно-ітераційний алгоритм розв'язання некоректних інтегральних рівнянь Вольтера. *Системні дослідження та інформаційні технології*, 2012, № 1. С. 101–112.

159. Саявко М. С. J-дробова регуляризація лінійних некоректних рівнянь. *Укр. мат. журнал*, 1996. Т. 48. № 8. С. 1130–1143.

160. Вступ до числових методів / П. І. Каленюк, та ін. Львів : Держ. ун-т «Львів. політехніка», 2000. 145 с.

161. Диференціальні рівняння: теорія, приклади, розв'язання / Т. С. Кагадій та ін. Дніпро : ДДАЕУ, 2022. 190 с.

162. Задачін В. М., Конюшенко Ш. Г. Чисельні методи. Харків : Вид-во ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с.

164. Розв'язування задач аналізу та диференціальних рівнянь засобами комп'ютерної алгебри Mathematica: підручник / Собчук В. В., Чичурін О. В., Кальчук І. В., Жигалло Т. В. Київ : Міленіум, 2021. 420 с.

165. Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Прикладні задачі теорії стійкості. К. : Київський ун-т, 2014. 142 с.

166. Wagon S. Mathematica in action: problem solving through visualization and computation 3rd ed. New York : Springer, 2010. 578 p.

167. Жученко О. А., Цапар В. С. Метод спрощення математичних моделей об'єктів керування із розподіленими параметрами. *Автоматизація технологічних і бізнес-процесів*, 2015. Вип. 7. С. 15–25.
168. Моделювання систем у середовищі MATLAB / С. Забара та ін. К. : Київський ун-т, 2011. 137 с.
169. Матвійчук Я. М. Математичне макромодельювання динамічних систем: теорія і практика. Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2000. 215 с.
170. Положаєнко С. А., Контерас Д. Е. Реалізація моделей динамічних об'єктів, представлених у вигляді нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з крайовими умовами. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2014. Т. 4. № 3. С. 250–255.
171. Самойленко В. Г., Конет І. М. Рівняння математичної фізики: навч. посіб. К. : Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2014. 283 с.
172. Close Charles M., Frederick Dean K. Modelling and Analysis of Dynamic Systems. 3th ed. INC. : John Wiley & Sons, 2001. 592 p.
173. Hernandez M. A., Rubio M. J. A uniparametric family of iterative processes for solving nondifferentiable equations *J. Math. Anal. Appl.*, 2002. Vol. 275. P. 821–834.
174. Любчак В. О., Назаренко В. О. Методи та алгоритми обчислень. Суми : СумДУ, 2008. 313 с.
175. Новотарський М. А. Алгоритми та методи обчислень. К. : НТТУ “КПІ ім. І. Сікорського”, 2019. 407 с.  
URL:<https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/7421218e-d7dd-4e75-aa3e-bd7979db4e6d/content>.
176. Каленюк П. І., Бакалець В. Л. Вступ до числових методів. Львів : Львівський націон. ун-т ім. І. Франка, 2000. 184 с.
177. Кветний Р. Н. Методи комп'ютерних обчислень : навч. посіб. Вінниця : ВДТУ, 2001. 148 с.

178. Бахрушин В. Є. Методи аналізу даних. Запоріжжя : КПУ, 2011. 268 с.
179. Бугрим О. В., Бойко Л. Й. Числові та степеневі ряди. Приклади їх застосування: навч. посіб. Дніпро: НГУ, 2014. 82 с.
180. Брушковський О. Л. Ряди. Рівне : НУВГП, 2010. 246 с.
181. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн. 2 / Г. Л. Кулініч та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. К. : Либідь, 2003. 368 с.
182. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. К : А. С. К., 2006. 647 с.
183. Бакун В. В. Математичний аналіз : підручник у 3-х ч.. Ч. 3.: Числові й функціональні ряди. Інтегрالي, залежні від параметра. К. : “КПІ ім. І. Сікорського”, 2021. 435 с.
184. Самборська О. М., Шелестовський Б. Г. Чисельні методи. Тернопіль : ТНТУ ім. І. Пулюя, 2010. 164с.
185. Бігун Я. Й. Числові методи. Інтерполювання. Числове інтегрування та диференціювання. Чернівці : Рута, 2005. 80 с.
186. Окуненко В. М., Ясинський В. К. Чисельні методи в моделюванні систем. Чернівці : Золоті литаври, 2006. 592с.
187. Цегелик Г. Г. Чисельні методи. Львів : Видавничий центр Львівського націон. ун-ту, 2004. 408с.
189. Овчинников П. П., Михайленко В. М. Числові методи.; за заг. ред. П. П. Овчинникова. 3-тє видання, виправлене. К. : Техніка, 2004. 792с.
190. Ясинський В. К. Основи обчислювальних методів. Чернівці : Золоті литаври, 2005. 396с.
191. Романюк М. І., Батіна О. А. Обчислювальна математика. К. : НТТУ “КПІ ім. І. Сікорського”, 2019. 193 с.  
URL: <https://ela.kpi.ua/items/7c9ce193-19dd-4320-ba34-948527435ebd>.
192. Лященко М. Я., Головань М. С. Чисельні методи. К. : Либідь, 1996. 288 с.

193. Попов В. В. Методи обчислень. К. : ВПЦ “Київський університет”, 2012. 303 с.
194. Вакал Є. С., Ловейкін А. В. Методи математичної фізики в прикладах і задачах. К. : Видавець Кравченко Я. О., 2020. 188 с.
195. Голубєва К. М. Елементи теорії похибок. Київ, 2020. 122 с.
196. Скопецький В. В., Стоян В. А., Кривонос Ю. Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. К. : Наукова думка, 2002. 458 с.
197. Прокопенко Ю. В., Татарчук Д. Д., Казміренко В. А. Обчислювальна математика. К. : НТТУ “КПІ ім. І. Сікорського”, 2013. 224 с.
198. Matrix computations / Golub P., Gene H., Van Loan, Charles F. Baltimore : John Hopkins University Press, 1996. 694 p.
199. Flannery Numerical Recipes. The art of scientific Computing / Н. William et al. Cambridge : University Press, 1992. 997 p.
200. Єріна А. М. Статистичне моделювання та прогнозування. К. : КНЕУ, 2001. 418 с.
201. Adèr H. J., Mellenbergh G. J. Advising on Research Methods: a consultant’s companion. The Netherlands : Johannes van Kessel Publishing, 2011. 304 p.
202. Бідюк П. І., Гожий О. П. Ймовірісно-статистичні методи моделювання і прогнозування. Миколаїв : Чорноморський держав. ун-т ім. Петра Могили, 2014. 440 с.
203. Костюшко І. А., Любашенко Н. Д., Третиник В. В. Методи обчислень. К. : НТТУ “КПІ ім. І. Сікорського”, 2021. 244 с.
204. Ляшенко Б. М., Кривонос О. М., Вакалюк Т. А. Методи обчислень. Житомир : Вид-во ЖДУ, 2014. 228 с.
205. Гаврилюк І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень. – К. : Вища школа, 1995. 367 с.
206. Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. К. : Либідь, 1995. 372 с.

207. Бойко Л. Т. Основи чисельних методів. Дніпро : Вид-во ДНУ, 2011. 244 с.
208. Кутнів М. В. Чисельні методи. Львів : Вид-во «Растр-7», 2010. 288 с.
209. Кісельова О. М., Шевельова А. Є. Чисельні методи оптимізації. Дніпро : Вид-во ДНУ, 2008 212 с.
210. Дорошенко Т. М., Мацько В. В. Теорія та методика формування елементарних математичних уявлень. Кременчук : ПП «Бітарт», 2019. 196 с.
211. Мамай Л. М. Теорія ймовірностей та математична статистика. Ужгород : Ужгородський націон. ун-т, 2021. 99 с.
212. Валь О. Д., Королюк С. І. Теорія ймовірностей. Чернівці : Книги-XXI, 2004. 160 с.
213. Волощенко А. Б., Джалладова І. А. Теорія ймовірностей та математична статистика. К. : КНЕУ, 2003. 256 с.
214. Коротун С. І. Основні поняття і категорії математичної теорії хаосу. *Вісник націон. ун-ту водного господарства та природокористування*, 2012. Вип. 3 (59). С. 99–107.
215. Feigenbaum M. J. Universal Behavior in Nonlinear Systems. *Los Alamos Science*, 2008, Vol. 1. No 1. P. 4–27.
216. Бєсхлібна О. С., Черних Л. О. Теоретико-множинні аспекти розв'язування нерівностей та їх систем. *Вісник міжнародного дослідного центру: «Людина: мова, культура, пізнання»: наук. журн.*, 2018. Т. 42. С. 99–103.
217. Filer Z., Chuikov A. Method of searching complex solutions of inequalities by the deflection method. *Physical and Mathematical Education*, 2021. Issue 5 (31). P. 73–78.
218. Ткаченко С. П. Нерівності у комплексній площині. *Сучасні проблеми природничих наук*, 2014. Т. 1 (2). С. 194–199.

219. Мусієнко А. П., Сердюк А. С. Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена на множинах цілих функцій. *Український математичний журнал*, 2013. Т. 65. № 5. С. 642–653.

URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/UMJ\\_2013\\_65\\_5\\_7](http://nbuv.gov.ua/UJRN/UMJ_2013_65_5_7).

220. Петергеря Ю. С., Соболев О. В., Абакумова О. О. Обчислювальна математика. К. : НТТУ “КПІ ім. І. Сікорського”, 2007. Ч. 1, 192 с.

202. Прокопенко Ю. В., Татарчук Д. Д., Казиміренко В. А. Обчислювальна математика. К. : Політехніка, 2003. 120 с.

223. Лазарев Ю. Ф. Моделювання динамічних систем у Matlab. К. : НТТУ “КПІ ім. І. Сікорського”, 2011. 421 с.

URL:

[https://moodle.znu.edu.ua/pluginfile.php/998176/mod\\_resource/content/1/mds\\_matlab.pdf](https://moodle.znu.edu.ua/pluginfile.php/998176/mod_resource/content/1/mds_matlab.pdf)

224. Абрамчук В. С., Абрамчук І. В. Дослідження швидкості збіжності класичних ітераційних методів розв’язування систем  $A\vec{x} = \vec{b}$  великих порядків. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць*, 2013. Вип. 8. С. 5–22.

225. Литвинова О. Б. Методи імітаційного моделювання в оцінці надійності найпростіших систем. *Reporter of the priazovskyi state technical university: Section: Economic sciences*, 2016. Issue 31. Vol. 1. P. 168–175.

226. Економіко-математичне моделювання: за ред. О. Т. Іващука. Тернопіль : ТНЕУ «Економічна думка», 2008. 704 с.

226. Стеценко І. В. Моделювання систем. Черкаси : ЧДТУ, 2010. 399 с.

URL: [https://web.kpi.kharkov.ua/auts/wp-content/uploads/sites/67/2017/02/MOCS\\_Kachanov\\_posobie.pdf](https://web.kpi.kharkov.ua/auts/wp-content/uploads/sites/67/2017/02/MOCS_Kachanov_posobie.pdf)

227. Барабашук В. І., Креденцера Б. П., Мірошніченко В. І. Планування експерименту в техніці: під ред. Б. П. Креденцера. К. : Техніка, 2004. 200с.

228. Адаменко М. І., Бейлін М. В. Основи наукових досліджень. Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2014. 188 с.
229. Білуха М. Т. Методологія наукових досліджень. К. : АБУ, 2002. 480 с.:
230. Метод кластеризації на основі послідовного запуску  $k$ -середніх з удосконаленим вибором кандидата на нову позицію вставки / О. М. Ткаченко та ін. *Наукові праці ВНТУ*, 2012. № 2. 1–10.
231. An Efficient  $k$ -means clustering algorithm: analysis and implementation [Text] / T. Kanungo et al. *IEEE Transactions On Pattern Analysis And Machine Intelligence*, 2002. Vol. 24. No. 7. P. 881–892.
232. Likas A., Vlassis N., Verbeek J. J. The global  $k$ -means clustering algorithm. *Pattern Recognition*, 2002. Vol. 36. No 2. P. 451–461.
233. Bradley P. S., Fayyad U. M. Refining initial points for  $K$ . Means clustering : (Conference on Machine Learning). *Proceedings of Fifteenth Intl*, 1998. P. 91–99. URL: <ftp://ftp.research.microsoft.com/pub/tr/tr-98-36.pdf>.
234. Romesburg, C. Cluster Analysis for Researchers. North Carolina : Lulu.com, 2004. 344 p.
235. Punj G., Stewart D. W. Cluster analysis in marketing research: review and suggestions for application. *Journal of Marketing Research*, 1983. No. 20. P. 134–148.
236. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Швідченко І. В. Теорія обчислень: від гарантованих оцінок похибок до сучасних комп'ютерних технологій. *Вісник Національної академії наук України*, 2020. № 1. С. 56–61.
237. Литвинов А. Л. Чисельні методи: теорія і практика. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. 166 с.
238. Аналітичні методи досліджень. Спектроскопічні методи аналізу: теоретичні основи і методики: за ред. Д. О. Мельничука. К. : ЦП «Компринт», 2016. 289 с.
239. Наконечний О. Г., Шевчук Ю. М., Чикрій В. К. Оцінка нестационарних параметрів диференційних рівнянь в умовах невизначеності.

*Кібернетика та системний аналіз: міжнародний науково-теоретичний журнал*, 2018. № 4. С. 109–121.

240. Гарантовані середньоквадратичні оцінки лінійних перетворень матриць в умовах статистичної невизначеності / О. Г. Наконечний та ін. *Проблеми керування та інформатики: міжнародний науково-теоретичний журнал*, 2021. Т. 66. № 2. С. 24-37. URL: [DOI: 10.34229/1028-0979-2021-2-3](https://doi.org/10.34229/1028-0979-2021-2-3).

241. Верлань А. Ф., Дячук О. А., Палагін В. В. Методи математичної редукції моделей динамічних систем. К. : Наукова думка, 2019. 311с.

242. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-те видання. К. : Центр учбової літ., 2010. 424 с.

243. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика. К. : Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008. 494 с.

244. Gray R. M. Probability, Random Processes and Ergodic Properties. Springer:Verlag, 1987. 205 p.

245. Durrett R. Probability, Theory and Examples. New York: Wadsworth Publishing, 1996. 482 p.

246. Kallenberg O. Foundation of Modern Probability.. Springer: Verlag, 1997. 523 p.

247. Обґрунтування попереднього вибору архітектури системи обробки даних з використанням нечіткої логіки / Шевченко С. В., Гужва В. О., Малиш В. Д., Морква І. Ю. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології, 2019. № 2. С. 81–87. URL: [DOI: 10.20998/2079-0023.2019.02.14](https://doi.org/10.20998/2079-0023.2019.02.14).

248. Парійській Є. Ю. Порівняльний аналіз математичних моделей і підходів до моделювання та аналізу безперервно-дискретних систем. *Диференціальні рівняння та процеси керування*, 1997. №1. С. 36–52.

249. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень / Р. Н. Кветний та ін.; за заг. ред. Р. Н. Кветного. Вінниця : ВНТУ, 2012. 193 с.

250. Тихоход В. О., Федорчук В. А. Паралельний алгоритм розв'язування систем інтегральних рівнянь Вольтерри II роду. *Електронне моделювання*, 2023. Т. 45, Вип. 6. С. 3–10.
251. Павленко, П. М. Основи математичного моделювання систем і процесів [Текст] / П. М. Павленко. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2014. – 274 с.
252. Томашевський В. М. Імітаційне моделювання систем і процесів. К.: ІСДО, 1994. 124 с.
253. Гліненко Л. К., Сухоносів О. Г. Основи моделювання технічних систем. Львів: Бескид Біт, 2003. 176 с.
254. Побудова і дослідження моделі надійності програмного забезпечення з індексом величини проекту / Я. М. Чабанюк та ін. *Інженерія програмного забезпечення*, 2010. Вип. 1. С. 1–6.
255. Яковина В., Смірнов В. Огляд основних підходів до аналізу надійності програмного забезпечення. *Комп'ютерні науки та інформаційні технології*, 2011 Вип. 719. С. 278–282.
256. Foidl H., Felderer M. Integrating software quality models into risk-based testing. *Software Quality Journal*, 2018. Vol. 26. P. 809–847.
257. Crispin L., Gregory J. Agile Testing: A Practical Guide for Testers and Agile Teams. New York: Addison-Wesley Signature Series (Cohn), 2010. 464 p.
258. Kaner K., Nguyen H. Q., Falk J. Testing Computer Software. *International Thomson Publishing Press*, 1999. Vol. 6. P. 536–542.
259. Culbertson R., Brown C., Cobb G. Rapid Testing. *Software Quality Institute Series*, 2000. Vol. 37. P. 362–374.
260. Практичний аналіз якості програмного забезпечення з відкритим кодом / Катаєва Є. Ю., Одокієнко С. М., Люта М. В., Савченко Я. С. *Управління розвитком складних систем*, 2020. № 44. С. 49-55. URL: [DOI: doi.org\10.32347/2412-9933.2020.44.49-55](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2020.44.49-55)

261. Говорущенко Т. О. Методологія оцінювання достатності інформації для визначення якості програмного забезпечення. Хмельницький : ХНУ, 2017. 310 с.
262. Галкін П. В., Ключник І. І. Програмування ПЛК в CODESYS. Харків : ФОП Панов А. М., 2019. 192 с.
263. Береза А. М. Основи створення інформаційних систем. 2 вид., перероб. і доп. К. : КНЕУ, 2001. 214 с.
264. Промислові мережі та інтеграційні технології в автоматизованих системах / Пупена О. М., Ельперін І. В., Луцька Н. М., Ладанюк А. П. К. : Ліра-К, 2011. 500с.
265. The Stanford Testbed of Autonomous Rotorcraft for Multi Agent Control (STARMAC) / G. M. Hoffmann et al. *Digital Avionics System Conference: Proceedings of the 23rd Conference, Salt Lake City, November 2004.* Salt Lake City, 2004. UT. P. 12–16.
266. Коссак О., Тумашова О. Методи наближених обчислень. Львів : Бак, 2003. 168 с.
267. Бейко І. В., Бублик Б. Н., Зінько П. Н. Методи і алгоритми розв'язування задач оптимізації. К. : Вища школа, 1998. 512 с.
268. Нефьодов Ю. М., Балицька Т. Ю. Методи оптимізації в прикладах і задачах. К. : Кондор. 2011. 324с.
269. Брановицька С. В., Медведєв Р. Б., Фіалков Ю. Я. Обчислювальна математика та програмування. К. : ІВЦ “Видавництво «Політехніка»”, 2004. 220 с.
270. Atkinson R., Kendall A. *An Introduction to Numerical Analysis.* 2nd ed. New York : John Wiley & Sons, 1989. 342 p.
271. Гой Т. П., Копач М. І., Федак І. В. Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь. Івано-Франківськ : Видавничо-дизайнерський відділ Центру інформаційних технологій Прикарпатського націон. ун-ту ім. В. Стефаника, 2010. 148 с.

272. Süli E., Mayers. E. An Introduction to Numerical Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 472 p.
273. Матюшенко М. В., Сівак Є. М. Методи наближених обчислень. Харків : НТУ “Харківський політехнічний інститут”, 2022. 192 с.
273. Теорія і практика ідентифікації об’єктів управління / Левчук І. Л., Манко Г. І., Тришкін В. Я., Корсун В. І. Дніпро : ДВНЗ УДХТУ, 2019. 203 с.
274. Положаєнко С. А., Прокоф’єва Л. Л. Планування діагностичного експерименту при локалізації несправностей безінерційних систем. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2018. Т. 8. № 1. С. 5–16.
275. Björck Åke. Numerical methods for least squares problems. Philadelphia: SIAM, 1996. 401 p.
276. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Метод найменших квадратів: Вища математика в прикладах і задачах; 2-ге видання. К. : Центр учбової літератури, 2009. С. 358 с.
277. Верлань А. А., . Верлань А. Ф., Положаєнко С. А. Обробка сигналів акустичної емісії. К. : Наукова думка, 2022. 259 с.
278. Basics of Piezo-ceramic Technology.  
URL: <http://www.ceramtec.ru/ceramicmaterials/piezo-ceramics/basics/>
279. Lu F., Lee H. P., Lim S. P. Modelling and analysis of micro piezoelectric power generators for micro-electromechanical-systems applications. *Smart Materials and Structures*, 2004. No 13. P. 57–63.
280. Невлюдов І. Ш., Палагін В. А., Разумов-Фризюк Є. А. Energy Harvesting: Огляд п’єзоелектричних перетворювачів. *НТЖ «Технологія приладобудування»*, 2015. № 2. С: 43–46.
281. Позіномінальні інтерполяційні многочлени та квадратурні функції / Абрамчук В. С., Абрамчук І. В., Прищепка Д. О., Пугач О. С. *Фізико-математична освіта*, 2018. Вип. 1 (15). С. 11–15.

282. Волкова С. О., Трунов О. М. Дослідження існуючих підходів підвищення якості програмного забезпечення критичного застосування. *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*, 2008. № 6 (33). С. 202–208.
283. Мінгальова Ю. Новітні криптографічні методи захисту інформації. URL: <http://eprints.zu.edu.ua/13902/1/Mingaleva3.pdf>.
284. Дискретні та алгоритмічні структури в інструментарії програмної інженерії / Скалозуб В. В., Ільман В. М., Івченко Ю. М., Андрющенко В. О. Дніпро : Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2016. 254 с.
285. Keller R. M. Formal Verification of Parallel Programs *Comm. ACM*, 1976. Vol. 19, No 17. P. 371–384.
286. A new image cipher in time and frequency domains / Ahmed A. Abd El-Latif, Xiamu Niu, Mohamed Amin. *Optics Communications*, 2012. Vol. 285, Issue 21-22. P. 4241–4251.
287. Ercan Solak, Cahit Çokal Algebraic break of image ciphers based on discretized chaotic map lattices. *Information Sciences*, 2011. Vol. 181. Issue 1. P. 227–233.
288. Верлань А. Ф., Положаєнко С. А., Сербов М. Г. Математичне моделювання аномальних дифузійних процесів. Сербов. К. : Наукова думка, 2011. 416 с.
289. Коломієць С. В. Теорія випадкових процесів : навч. посіб.; у – 2 ч. . Ч. II. Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2013. 103 с.
290. Карташов В. П. Імовірність, процеси, статистика. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2007. 504 с.

ДОДАТОК А ДОКУМЕНТИ, ЩО ПІДТВЕРДЖУЮТЬ  
ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Перший проректор  
Національного університету  
«Одеська політехніка»

Сергій НЕСТЕРЕНКО



*Сергій Нестеренко* 2025 р.

### ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційної роботи

ПРОКОФЬЄВА Андрія Юрійовича

«МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТОЧНОСТІ ТА ДОСТОВІРНОСТІ  
ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В  
ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ І УПРАВЛІННЯ»

в навчальному процесі Одеського національного політехнічного університету

Чинна довідка видана в тому, що в курсах лекцій з дисциплін «Числові методи», «Комп'ютерне моделювання процесів і систем», «Ідентифікація та моделювання процесів» і «Моделі та інструментальні засоби математичного моделювання технологічних процесів», що читаються здобувачам першого (бакалаврського) та другого (магістерського) рівнів вищої освіти за спеціальністю 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» (освітні програми — «Інтелектуальні комп'ютерні системи управління», відповідно для кожного рівня вищої освіти) на кафедрі комп'ютеризованих систем та програмних технологій Науково-навчального інституту комп'ютерних систем Національного університету «Одеська

політехніка», використовуються наукові результати, одержані в дисертаційній роботі ПРОКОФЬЄВА Андрія Юрійовича.

Принципи побудови та обчислювальної (числової) реалізації математичних моделей (ММ) динамічних систем викладаються за темами: «Числове диференціювання та інтегрування функцій», «Числове інтегрування звичайних диференційних рівнянь та диференційних рівнянь у частинних похідних», «Числовий розв'язок інтегральних рівнянь» — дисципліни «Числові методи»; «Машинні методи та інструментальні засоби реалізації математичних моделей систем управління» — дисципліни «Моделі та інструментальні засоби математичного моделювання технологічних процесів».

При розгляді питань практичної реалізації систем комп'ютерного моделювання поширених динамічних систем (дисципліни «Комп'ютерне моделювання процесів і систем», «Ідентифікація та моделювання процесів») використовуються запропоновані в дисертаційній роботі ПРОКОФЬЄВА Андрія Юрійовича методи і алгоритми оцінки точності та достовірності розв'язків задач моделювання і управління динамічними системами із застосуванням засобів комп'ютерної техніки.

Навчальний процес підтримано ПРОКОФЬЄВИМ Андрієм Юрійовичем у співпраці з лекторами відповідних курсів, що знайшло відбиття у підготовці розділів конспектів лекцій та методичних вказівок до практичних і лабораторних робіт із зазначених дисциплін.

Директор  
Науково-навчального  
Інституту комп'ютерних  
систем, д.т.н., професор



Світлана АНТОЩУК

ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ  
ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ  
«НАФТОГАЗХІМ СЕРВІС»  
(ТОВ «НГХ СЕРВІС»)

Ідентифікаційний код 38781431

Україна, 04050, м. Київ,  
вул. Січових Стрільців, буд. 68-Б, літера А

Тел.: +380 (44) 232-09-59

Е-пошта: [info@ogcs.com.ua](mailto:info@ogcs.com.ua)

Вебсайт: [www.ogcs.com.ua](http://www.ogcs.com.ua)



АКТ

впровадження результатів дисертаційного дослідження

ПРОКОФЬЄВА Андрія Юрійовича на тему:

«МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТОЧНОСТІ ТА ДОСТОВІРНОСТІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ»

ТОВ «НАФТОГАЗХІМ СЕРВІС» прийняло до впровадження запропоновані в дисертаційній роботі ПРОКОФЬЄВА А.Ю. методи та обчислювальні процедури числової реалізації математичних моделей (ММ) динамічних систем. Для умов існуючого в організації виробництва, динамічні системи являють собою основні виробничі компоненти, зокрема, такі як: технологічні апарати виробничого циклу та процеси переробки сировини в готову продукцію, які в цих апаратах здійснюються. Причому, ММ зазначених апаратів і процесів складають основу методологічної та модельної підтримки запровадженої в умовах діючого виробництва автоматизованої системи управління технологічним процесом (АСУ ТП). Таким чином, від ступеню адекватності числової реалізації ММ технологічних апаратів та відповідних процесів, що в них відбуваються (суть — означених їх вище як динамічних систем) напряму залежать якісні показники перебігу технологічного процесу та кінцевої продукції.

Застосування розроблених в дисертаційній роботі методів аналізу процедур обчислювальної реалізації ММ динамічних систем дозволило зняти проблему точності та достовірності при оперативній корекції і підлаштуванні даних ММ в умовах безперервності виробництва. Саме така корекція в реальному часі ММ динамічних систем діючого виробництва, складає постановки прикладних задач їх моделювання та управління.

Впроваджені запропоновані в дисертації ПРОКОФЬЄВА А.Ю. методи аналізу точності та достовірності обчислювальної реалізації ММ динамічних систем демонструють свою ефективність у зниженні витрат на етапі числових процедур, що задіяні в рамках АСУ ТП, та сприяють підвищенню якості готової продукції — в частині зменшення відхилень від нормативних показників.

Головний інженер

Вячеслав ДАНИЛЕНКО



ДОДАТОК Б      САМОКОНТРОЛЬ ПРИ ВИКОНАННІ АЛГОРИТМУ МЕТОДУ  
 ЗІ ЗРОСТАЮЧОЮ ТОЧНІСТЮ ОБЧИСЛЕНЬ В ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ  
 ЗАДАЧ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ  
 СИСТЕМ

В розділі 3.1 було зазначено, що у методі зі зростаючою точністю обчислень послідовно отримується значення функції на кроці інтегрування з порядком точності *локальної похибки*, який збільшується (тобто похибки на кроці інтегрування).

Виконаємо аналітичне дослідження запропонованого методу зі зростаючою точністю при реалізації його алгоритму в ході розв'язування прикладної задачі.

В якості прикладу розглянемо застосування запропонованого методу в задачі для *другого порядку точності*. Тоді аналоги виразів (3.7) та (3.8) можна записати у наступному вигляді:

$$y_{i+1}^{(3)} = y_i^{(3)} + \frac{1}{2}h[f(y_i^{(s)}, u_i, t_i) + f(y_{i+1}, u_{i+1}, t_{i+1})], \quad (\text{Б.1})$$

$$y_{i+1}^{(2)} = y_i^{(3)} + hf(y_i^{(s)}, u_i, t_i), \quad (\text{Б.2})$$

де верхній індекс показує порядок локальної похибки наближеного значення ( $s$  – заданий порядок точності).

Порівнюючи  $y_{i+1}^{(3)}$  та  $y_{i+1}^{(2)}$  між собою, можна робити висновок щодо локальної похибки розв'язку. Цей самий прийом можна застосовувати і для віднаходження збоїв та похибок.

При  $s = 3$  процедура (Б.1), (Б.2) переходить в удосконалений метод Ейлера-Коші. При  $s = 2$  на кроці інтегрування робиться одне обчислення функції  $f(y_i, u_i, t_i)$ . Це ж значення похідної використовується на наступному кроці при обчисленні  $y_{i+2}^{(2)}$ .

Таким чином, якщо на попередньому кроці не було збою, то похибка при визначенні  $y_{i+1}^{(2)}$  може відбутися тільки при реалізації виразу (Б.2).

Очевидно, що на кожному кроці інтегрування можна отримати еталонне значення  $y_{i+1}^{(2)}$ , достовірність якого визначає ймовірність збою при застосуванні виразу (Б.2). Тоді величина  $\xi = |y_{i+1}^{(2)} - y_{i+1}^{(3)}|$  визначається різницею залишкових членів і є малою величиною порядку  $O(h^2)$ . В разі виникнення при визначенні  $y_{i+1}^{(2)}$  збою та отриманні значення з похибкою, то при визначенні  $y_{i+1}^{(3)}$  слід використовувати значення похідної  $\frac{\partial f(y + \Delta y, u, t_{i+1})}{\partial y}$ . Однак, слід мати на увазі, що на достовірність контролю може впливати лише порівняння значень  $y_{i+1}^{(3)}$  та  $y_{i+1}^{(2)}$ .

Наступним прикладом розглянемо застосування методу зі зростаючою точністю у випадку четвертого порядку точності. Тоді алгоритм методу набуде вигляду:

$$y_{i+1}^{(5)} = y_i^{(5)} + \frac{1}{6} h \left[ f(y_i^{(s)}, t_i) + 4f\left(y_{i+2/3}, t_i + \frac{1}{2} h\right) + f(y_{i+1}^{(4)}, t_i + h) \right], \quad (\text{Б.3})$$

$$y_{i+1/2}^{(4)} = y_i^{(5)} + \frac{1}{6} 8h \left[ 2f(y_i^{(s)}, t_i) + 3f\left(y_{i+2/3}, t_i + \frac{2}{3} h\right) + f(y_{i+1}^{(4)}, t_i + h) \right], \quad (\text{Б.4})$$

$$y_{i+1}^{(4)} = y_i^{(5)} + \frac{1}{4} h \left[ f(y_i^{(s)}, t_i) + 3f\left(y_{i+2/3}, t_i + \frac{2}{3} h\right) \right], \quad (\text{Б.5})$$

$$y_{i+2/3}^{(3)} = y_i^{(5)} + \frac{2}{3} h f\left(y_{i+1/3}, t_i + \frac{1}{3} h\right), \quad (\text{Б.6})$$

$$y_{i+1/3}^{(2)} = y_i^{(5)} + \frac{1}{3} h f\left(y_i^{(s)}, t_i + \frac{1}{3} h\right), \quad (\text{Б.7})$$

де  $i = 4$ .

Функція управління не враховувалася (тобто  $f(y_i^{(s)}, t_i) \equiv f(y_i^{(s)}, u_i, t_i)$ ).

У випадку алгоритму (Б.3) — (Б.7) контроль обчислень можна організувати, порівнюючи величини  $y_{i+1}^{(4)}$  та  $y_{i+1}^{(5)}$ .

## ДОДАТОК В СПОСОБИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

При організації контролю процесу обчислень необхідно мати *спосіб прийняття рішень* за яким визначається наявність або відсутність збою та приймається рішення щодо подальшого перебігу обчислювального процесу. Для визначення способу прийняття рішення має бути обрана *міра розбіжності значень* (або їх *не збігання*), отриманих за основним та контрольним алгоритмах, призначено *допуск* на цю міру та обрано *стратегію* управління обчислювальним процесом. Висновок щодо наявності або відсутності збою робиться шляхом перевірки умови

$$\xi \in D, \quad (\text{B.1})$$

де  $\xi = \xi(\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}})$  – міра точності обчислень;

$D$  — допустима область значень цієї міри.

Розглянемо можливість вираження для міри розбіжності значень, отриманих за основним та контрольним алгоритмах. Вибір певного функціоналу  $\xi = \xi(\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}}) \in D$  в якості міри визначається з міркувань простоти реалізації відповідних обчислень та вимог *точності контролю*. Один з варіантів вибору міри точності обчислень зводиться до завдання *норми вектора*  $(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})$ , та при цьому можуть використовуватися наступні вирази:

$$\xi(\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}}) = \sum_{j=1}^n |y_j - \bar{y}_j|, \quad (\text{B.2})$$

$$\xi(\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}}) = \sup_j |y_j - \bar{y}_j|, \quad (\text{B.3})$$

$$\xi(\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}}) = \left[ \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y}_j)^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{B.4})$$

Значення величини  $\xi$  утворює область  $R$ , яка являє собою додатну речовинну числову напіввісь. Для випадку, коли величини  $y_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  є різнорідними, бажано їх *нормувати*, відносячи, наприклад, до максимального значення. В цьому випадку, зокрема, функціонал (Б.1.2) набуде вигляду:

$$\xi(\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}}) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{|y_j - \bar{y}_j|}{\max_j |y_j|} \right). \quad (\text{B.5})$$

Подібним чином перетворюються і функціонали (B.3) та (B.4).

Може виявитися доцільним покомпонентне порівняння векторів  $\mathbf{Y}$  та  $\bar{\mathbf{Y}}$ . Тоді в якості міри точності обчислень може бути обрано вектор-функції  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ :

$$\xi(\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}}) = |\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}| \quad (\text{B.6})$$

або

$$\xi(\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}}) = \mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}. \quad (\text{B.7})$$

Для практичних випадків, коли в якості міри точності обчислень може бути використано вираз (B.1), область  $D$  являє собою паралелепіпед з площинами паралельними осям координат, а умова (B.1) набуває вигляду:

$$\xi_{\text{доп}}^{\text{H}} \leq \xi \leq \xi_{\text{доп}}^{\text{B}}, \quad (\text{B.8})$$

де  $\xi_{\text{доп}}^{\text{H}}$ ,  $\xi_{\text{доп}}^{\text{B}}$  – відповідно нижній та верхній допуски на величину  $\xi$ .

Якщо  $\xi \in D$ , вважається, що збою не було і продовжується розв'язування основної задачі; при  $\xi \notin D$  вважається, що відбувся збій і подальший плин обчислювального процесу залежить від прийнятої в даному випадку стратегії (здійснення повторних обчислень або їх подальшого припинення).

Коли в якості міри точності обчислень використовується кубічна норма (В.3), то область  $D$  являє собою допустиму різницю значень по кожній з компонент векторів розв'язку, отриманих по основному та контрольному алгоритмах. Застосування при контролі кубічної норми рівносильне випадку, коли в якості міри використовується вектор-функція (В.6) і на всі компоненти вектора  $\xi$  призначаються однакові допуски, тобто  $\xi_{\text{доп}}$  являє собою скаляр. За числом обчислень функціонали (В.2) та (В.3) близькі один до другого. Обчислення за виразом (В.4) займають значно більше часу, через підведення у ступінь та вилучення квадратного кореня.

Існування області  $D$ , відмінної від нуля, пояснюється неспівпадінням результатів, отриманих по основному та контрольному алгоритмах та характеризує область невизначеності при прийнятті рішення щодо наявності або відсутності збою..

Розглянемо групу подій:

$$S = A\Lambda \cup \bar{A}\Lambda \cup A\bar{\Lambda} \cup \bar{A}\bar{\Lambda}, \quad (\text{В.9})$$

де  $A$  – подія, що відповідає відсутності збоїв при обчисленнях за алгоритмом  $A_b$ ;

$\Lambda$  – подія, що відповідає відсутності збоїв при обчисленнях за алгоритмом  $A_k$ ;

$\bar{A}$  та  $\bar{\Lambda}$  – події протилежні для  $A$  та  $\Lambda$ , відповідно, за умови, що виникнення збоїв при обчисленнях за алгоритмами  $A_b$  та  $A_k$  є незалежними подіями.

Результат, отриманий по основному алгоритму  $A_b$ , можна представити у вигляді:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{H}, \quad (\text{B.10})$$

де  $\mathbf{Y}_0$  – точне значення, яке повинно бути отримано за алгоритмом  $A_b$ ;

$\mathbf{H} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$  — випадковий вектор, що визначається виразом

$$\text{який } \mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при події } A, \\ \mathbf{H}^* & \text{при події } \bar{A}. \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Результат, який визначається за контрольним алгоритмом  $A_k$ , можна представити у вигляді:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{M}, \quad (\text{B.12})$$

де  $\mathbf{M} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$  – випадковий вектор, який визначається виразом

$$\text{який } \mathbf{M} = \begin{cases} \mathbf{M}_1 & \text{при події } \Lambda, \\ \mathbf{M}_2 & \text{при події } \bar{\Lambda}. \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Тепер, з урахуванням (B.10) та (B.12) вираз для міри точності набуде вигляду:

$$\xi = \xi(\mathbf{Y}_0 + \mathbf{H}, \mathbf{Y}_0 + \mathbf{M}). \quad (\text{B.14})$$

Ймовірнісні характеристики величини  $\xi$  залежать від ймовірнісних характеристик векторів  $\mathbf{H}$  та  $\mathbf{M}$ , які визначаються відповідними подіями, що утворюють групу (B.9).

Для події АЛ  $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ , а  $\mathbf{M}$  – вектор. елементи якого є випадковими обмеженими величинами. Тобто, за відсутності збоїв  $\xi$  являє собою випадкову обмежену величину.

Оскільки відмінність  $\xi$  від нуля може бути як наслідком збою, так і неточністю обчислень по алгоритмах  $A_b$ ,  $A_k$ , то наявність дисперсії величини  $\xi$  за відсутності збоїв можна трактувати як власний шум методу контролю, що знижує точність.

За допомогою цифрового моделювання при контролі розв'язку рівнянь руху керованого об'єкта отримано гістограму величини  $\xi$  (рис. В.1), коли в якості контрольного взято алгоритм першого порядку точності (3.19), а

$$\xi = \left[ \sum_{j=1}^6 \left( \frac{y_{j,i} - \bar{y}_{j,i}}{\max_j |y_j|} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (\text{В.15})$$

Різка зміна на кроці, який контролюється, сигналів управління  $U$  спричиняє значну зміну розв'язку системи (3.1) на цьому кроці. Оскільки в контрольованому алгоритмі використовуються лише результати обчислень, отримані по основному алгоритму до контрольованого кроку обчислень, то різниця розв'язків за алгоритмами  $A_b$  та  $A_k$  досягає свого максимуму. Для практичних задач поява великих значень величини  $\xi$  є достатньо рідкісною подією, що впливає з виду щільності розподілу  $\rho(\xi)$  наведеної на рис. В.1. Як показують проведені числові експерименти, вид наведеної щільності розподілу величини  $\rho(\xi)$  є характерним для екстраполяційних та інтерполяційних методів контролю числового розв'язування рівнянь динаміки керованих об'єктів. Відхилення величини  $\xi$  при збої несе в собі корисну інформацію щодо перебігу обчислювального процесу.

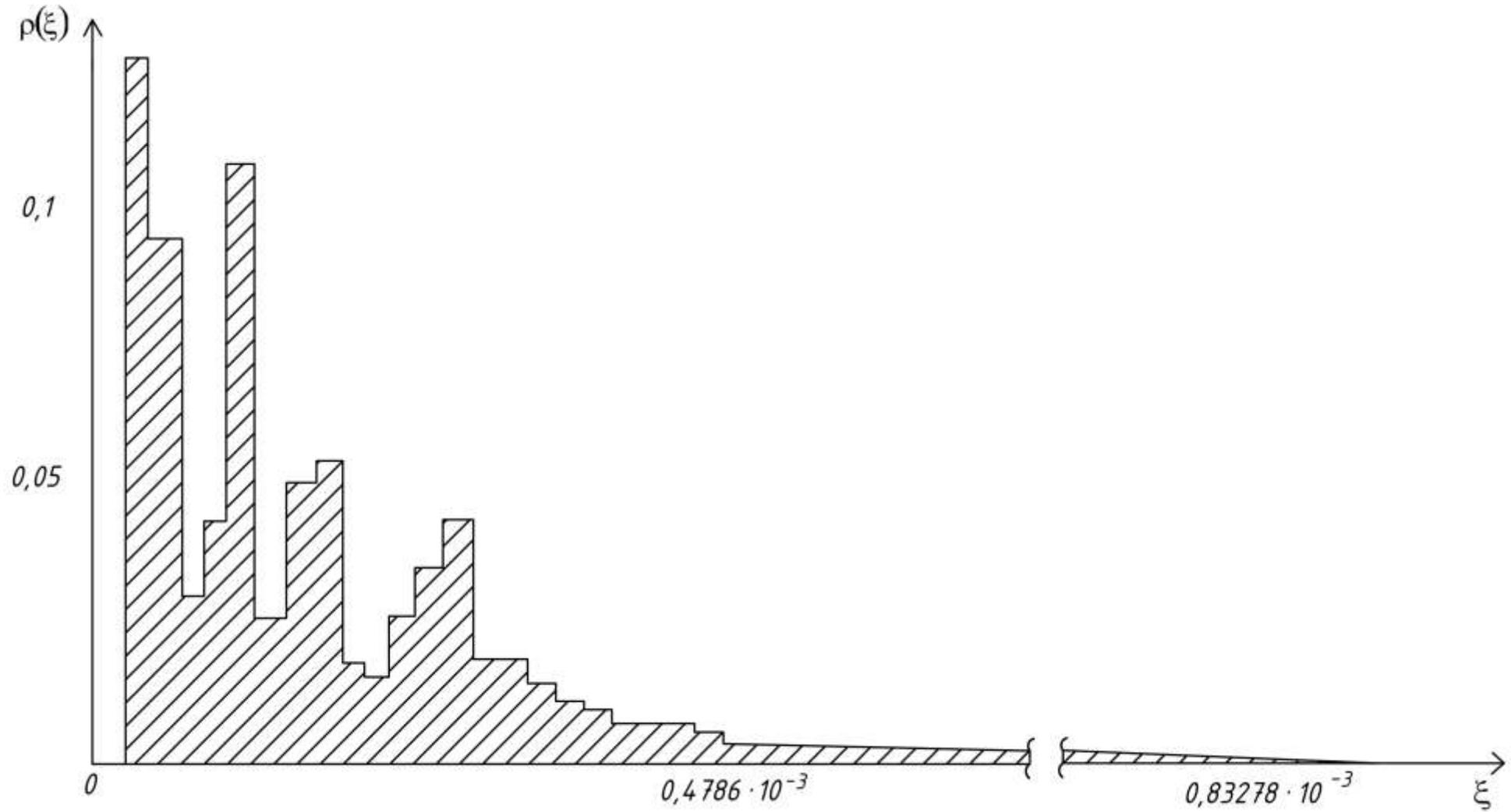


Рисунок В.1 – Гістограма міри точності  $\xi = \xi(Y, \bar{Y})$

Очевидно, що чим більші величини

$$\partial\xi/\partial y_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (\text{B.16})$$

тим більш «слабкі» збої буде виявлено.

Вибір міри точності обчислень має бути підпорядкований вимозі збільшення відношення «сигнал/шум». Шум визначається розмірами області  $D$ , а величина корисного сигналу залежить від величин (B.16).

Значення величин (B.16) для функціоналів (B.6), (B.15), які розглядаються, в області безперервності визначаються виразами

$$|\partial\xi/\partial y_j| = \frac{|y_j - \bar{y}_j|}{\left( \max_j |y_j| \right)^2 \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{y_j - \bar{y}_j}{\max_j |y_j|} \right)^2 \right]^{1/2}},$$

$$|\partial\xi/\partial y_j| = \frac{1}{\max_j |y_j|}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Якщо враховувати складність обчислень, то функціонал, що визначає точність обчислень, можна обрати виходячи з досягнення максимуму величини:

$$\lambda = \frac{1}{\xi_{\max}} \sum_{j=1}^n (\partial\xi/\partial y_j).$$

В загальному випадку при виборі величини міри точності слід враховувати і час, необхідний для відповідних обчислень. Для перевірки умови (B.1.8) необхідно визначити значення  $\xi_{\text{доп}}^H$  та  $\xi_{\text{доп}}^B$ . Для функціоналів типу норм слід

покласти  $\xi_{\text{доп}}^H = 0$ . У цьому випадку задача зводиться до визначення величини  $\xi_{\text{доп}}^B$  в області їх значень.

Можна прийняти  $\xi_{\text{доп}}^B = \xi_{\text{max}}$ , однак, враховуючи вид щільності розподілу  $\rho(\xi)$  такий підхід може бути (або вважатися) *оптимальним* з точки зору можливих похибок при контролі.

Відомо [19], що в теорії контролю прийнято розрізняти два види похибок:

- похибки першого роду  $\alpha$  – тобто прийняття рішення «годний», коли об'єкт контролю у дійсності не задовольняє висунутих до нього вимог (інакше: приймається хибна гіпотеза «годний» для об'єкта, який не відповідає цій гіпотезі);
- похибки другого роду  $\beta$  – тобто прийняття рішення «не годний», хоча об'єкт у дійсності задовольняє висунутим до нього вимогам (інакше: приймається хибна гіпотеза «не годний» для об'єкта, який відповідає цій гіпотезі).

Кількісно похибки  $\alpha$  та  $\beta$  оцінюються ймовірностями відповідних подій. Для груп подій (В.9) введемо позначення:

$$s_1 = A\Lambda, s_2 = \bar{A}\Lambda, s_3 = A\bar{\Lambda}, s_4 = \bar{A}\bar{\Lambda}.$$

Поява збоїв при обчисленні по основному алгоритму та при проведенні контролю будемо вважати незалежними подіями. Прийнемо також, що перевірка умови (В.1) завжди може бути виконаною. Для конкретності подальших розмірковувань будемо вважати, що потік збоїв підпорядковується пуасонівському потоку [289], який характеризується експоненціальним законом розподілу ймовірності  $p$  потрапляння збою у відрізок часу  $t$ :

$$p = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (\text{В.17})$$

де  $\lambda$  – інтенсивність потоку збоїв.

Задача контролю полягає у розпізнаванні подій:  $A$  або  $\bar{A}$ . В силу самого принципу організації контролю процес розпізнавання полягає у аналізі інформації (вектор  $\xi$ ), яка відповідає одній з подій

$$s_l \in S, \quad l = \overline{1, 4}.$$

При цьому групу подій, в залежності від результату, отриманого за алгоритмом  $A_b$  (В.11), (В.13), можна розділити наступним чином:  $s_1, s_3 \in S'$  (для події  $A$ );  $s_2, s_4 \in S''$  (для події  $\bar{A}$ ). Ознака, за якою розділяються події, визначаються виразом:

$$S' = \{s_l : \xi_l \in D\},$$

$$S'' = \{s_l : \xi_l \notin D\}, \quad l = \overline{1, 4}.$$

Ймовірність виконання умови (Б.1.1) для кожної з подій  $s_l$ ,  $l = \overline{1, 4}$  буде дорівнювати

$$P_l = p\{\xi \in D/s_l\} = \int_D \rho(\xi/s_l) d\xi, \quad (\text{В.18})$$

де  $\rho(\xi/s_l)$  –  $n$ -мірна щільність розподілу вектора  $\xi$  при умові події  $s_l$ .

Похибка контролю полягає у віднесенні події не до своєї групи. Ймовірності похибок першого та другого роду в даному випадку визначаються відповідно виразами:

$$\alpha = p\{\xi_l \in D/s_l \in S_2\},$$

$$\beta = p\{\xi_l \notin D/s_l \in S_1\}.$$

З урахуванням (Б.1.17) та (Б.1.18) можна записати

$$\begin{aligned} \alpha &= p(\bar{A})p(\Lambda)P_2 + p(\bar{A})p(\bar{\Lambda})P_4 = \\ &= e^{-\lambda t_k} (1 - e^{-\lambda t_0}) P_2 + (1 - e^{-\lambda t_0}) (1 - e^{-\lambda t_k}) P_4, \\ \beta &= p(A)p(\Lambda)(1 - P_1) + p(A)p(\bar{\Lambda})(1 - P_3) = \\ &= e^{-\lambda t_0 + t_k} (1 - P_1) + e^{-\lambda t_0} (1 - e^{-\lambda t_k}) (1 - P_3), \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Враховуючи вид щільності розподілу шуму контролю (рис. В.1) та те, що  $\xi_{\text{доп}}$  перебуває, як правило, на інтервалі  $[0, 1\xi_{\text{max}}, \xi_{\text{max}}]$  при визначенні інтеграла  $P_1$  у одновимірному випадку можна скористатися виразом

$$P_1 = 1 - \int_{\xi_{\text{доп}}}^{\xi_{\text{max}}} [\rho(\xi/s_1)] d\xi,$$

де  $\rho(\xi/s_1)$  на  $[\xi_{\text{доп}}, \xi_{\text{max}}]$  являє собою пряму, яка апроксимує відповідну щільність розподілу. Числові дослідження показали, що ця пряма перетинає вісь абсцис у точці  $\xi_{\text{max}}$  та обмежує на інтервалі  $[0, 1\xi_{\text{max}}, \xi_{\text{max}}]$  (5...30)% всієї площі гістограми (залежить від конкретного виду останньої).

При відомих ймовірностних характеристиках вихідної інформації щільності розподілу  $\rho(\xi/\bar{A}\Lambda)$  та  $\rho(\xi/A\bar{\Lambda})$  можуть бути отримані шляхом комп'ютерного моделювання збоїв.

Визначення оптимальних допусків в  $n$ -мірному просторі для міри точності обчислень (В.5) зводиться до апроксимації  $n$ -мірної щільності розподілу  $\rho(\xi/A\Lambda)$   $n$ -мірним паралелепіпедом за умови мінімізації певного критерію. Розв'язування

прикладних задач показало, що на практиці можуть виникати складності, зумовлені отриманням багатовимірної щільності розподілу  $\rho(\xi/AL)$ . Проте задачу можна значно спростити, якщо визначати допуски на кожен компоненту вектора  $\xi$ , вважаючи їх незалежними, та використовуючи для цього одновимірні щільності розподілу  $\rho(\xi_i/AL)$ ,  $i = \overline{1, n}$  як це робилося для функціоналів типу норм. При визначенні показників якості в даному випадку можна отримати оцінки «зверху» відповідних величин.

Також, при розв'язуванні прикладних задач, слушно для організації контролю призначати однобічний допуск

$$\xi \leq \xi_{\text{доп}}. \quad (\text{B.20})$$

Така можливість є для функціоналів типу норм та при виборі в якості міри точності виразу (B.5). При цьому призначається, по суті, симетричний допуск на величини  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Даний підхід виправданий, якщо щільність  $\rho(\xi_i/AL)$ ,  $i = \overline{1, n}$  має вид, близький до симетричного.

Ймовірність похибки при прийнятті рішення щодо наявності збою складається з ймовірностей першого та другого роду. Якщо похибкам призначити «ціни», то *середній ризик* при контролі буде визначатися величиною

$$R = C_1\alpha + C_2\beta,$$

де  $C_1, C_2$  – «ціни» похибок першого та другого роду відповідно.

Значення  $\xi_{\text{доп}}^B$  може бути віднайдено з умови мінімуму середнього ризику  $R$ . Для одновимірного випадку необхідна умова екстремуму запишеться наступним чином

$$\left( \frac{dR}{d\xi_{\text{доп}}^B} \right) = 0,$$

а для похибок першого та другого роду  $\alpha$  та  $\beta$ , завданих виразами (В.19), набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dR}{d\xi_{\text{доп}}^B} \right) = C_2 \left[ p(\bar{A})p(\Lambda)\rho\left(\xi_{\text{доп}}^B / \bar{A}\Lambda\right) + p(\bar{A})p(\bar{\Lambda})\rho\left(\xi_{\text{доп}}^B / \bar{A}\bar{\Lambda}\right) \right] - \\ - C_1 \left[ p(A)p(\Lambda)\rho\left(\xi_{\text{доп}}^B / A\Lambda\right) + p(A)p(\bar{\Lambda})\rho\left(\xi_{\text{доп}}^B / A\bar{\Lambda}\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{В.21})$$

Для того, щоб віднайдене з виразу (В.21) значення  $\xi_{\text{доп}}^B$  відповідало мінімуму середнього ризику  $R$  необхідно також виконання наступної умови

$$\left[ \frac{d^2 R}{d\left(\xi_{\text{доп}}^B\right)^2} \right] > 0. \quad (\text{В.22})$$

Диференціюючи (В.21) по  $\xi_{\text{доп}}^B$  отримаємо:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^2 R}{d\left(\xi_{\text{доп}}^B\right)^2} \right] = C_2 \left[ p(\bar{A})p(\Lambda)\rho'\left(\xi_{\text{доп}}^B / \bar{A}\Lambda\right) + p(\bar{A})p(\bar{\Lambda})\rho'\left(\xi_{\text{доп}}^B / \bar{A}\bar{\Lambda}\right) \right] - \\ - C_1 \left[ p(A)p(\Lambda)\rho'\left(\xi_{\text{доп}}^B / A\Lambda\right) + p(A)p(\bar{\Lambda})\rho'\left(\xi_{\text{доп}}^B / A\bar{\Lambda}\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{В.23})$$

Якщо розподіл  $\rho(\xi/A\Lambda)$  є одномодальним (тобто з одним значенням екстремуму, або – «одногорбим»), а щільність розподілу  $\rho(\xi_i/A\Lambda)$ ,  $i = \overline{1, n}$  – рівномірною, то умова (В.22) виконується при  $\xi_{\text{доп}}^B > \xi_m$ , де  $\xi_m$  – мода розподілу  $\rho(\xi/A\Lambda)$ . Дійсно, для рівномірного закону  $\rho(\xi/A\Lambda)$  при  $\xi > \xi_m$  похідна  $\rho'(\xi/A\Lambda) < 0$  і, як впливає з виразу (В.23), друга похідна – додатна.

Вище величина  $\xi_{\text{доп}}^B$  визначалася з умови мінімуму середнього ризику  $R$ . Якщо «ціни» похибок першого та другого роду однакові (тобто  $C_1 = C_2$ ), то  $\xi_{\text{доп}}^B$  повинна визначатися з умови, яка є частинним випадком умови мінімального ризику.

При цьому вибором  $\xi_{\text{доп}}^B$  мінімізується ймовірність сумарної похибки:

$$P_{\text{пох}} = P_{\alpha} + P_{\beta}.$$

У прикладних задачах, коли при заданому рівні ймовірності однієї з похибок необхідно мінімізувати ймовірність іншої похибки, можна скористатися критерієм Неймана-Пірсона [290].

Програмна реалізація методу контролю з *фіксованою* областю  $D$  найбільш проста, але не має краще співвідношення «сигнал/шум». Зменшення шуму можна досягти за допомогою *динамічного вибору допусків*  $\xi_{\text{доп}}$ , коли розміри області  $D$  змінюються в залежності від поведінки величини  $\xi$ . Подібним чином можна уточнювати  $\xi_{\text{доп}}$  на кожному кроці обчислень. В цьому випадку підраховується прогноз величини  $\xi_{\text{доп}}$  для  $(i+1)$ -го кроку обчислень по значеннях  $\xi_{\text{доп}}$  на попередніх  $l \leq i$  кроках. Для прогнозу можуть бути використані екстраполяційні формули необхідного порядку точності. Оскільки прогноз  $\xi_{\text{доп.пр.}}$  виконується також з певною похибкою, то необхідно провести попереднє дослідження для випадкової величини:

$$\eta = \xi_{\text{доп.пр.}} - \xi$$

та прийняти діапазон щодо значення останньої.

## ДОДАТОК Г СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації.

1. Прокоф'єв А. Ю. Аналіз похибок математичного моделювання динамічних об'єктів, які описуються інтегральними рівняннями. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2022. Т. 12, № 3. С. 209-219. DOI 10.15276/imms.v12.no3.209. Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: <http://immm.opu.ua/#a23>;

[http://immm.opu.ua/files/archive/n3\\_v12\\_2022/immm\\_n3\\_v12\\_2022.pdf](http://immm.opu.ua/files/archive/n3_v12_2022/immm_n3_v12_2022.pdf).

2. Прокоф'єв А. Ю. Метод точнісного тарювання при реалізації математичних моделей динамічних систем в задачах моделювання та управління. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*, 2022. Вип. 23. С. 116-129. DOI 10.326226/2308-5916.2022-23.116-129. Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: <http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/issue/archive>.

3. Лись Д. А., Прокоф'єв А. Ю. Розробка та числова реалізація математичної моделі гравітаційної хвилі на границі поділу двошарової рідинної системи. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2023. Т. 13, № 1-2. С. 97-103. DOI 10.15276/imms.v13.no1-2.97. Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: <http://immm.opu.ua/#a23>;

[http://immm.opu.ua/files/archive/n3\\_v12\\_2022/immm\\_n1-2\\_v13\\_2023.pdf](http://immm.opu.ua/files/archive/n3_v12_2022/immm_n1-2_v13_2023.pdf).

4. Прокоф'єв А. Ю. Дослідження показників точності моделей нелінійних динамічних систем. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*, 2023. Вип. 24. С. 56–67. DOI: 10.32626/2308-5916.2023-24.56-67. Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: <http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/issue/archive>.

5. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Моделі визначення надійності динамічних систем, функціонування яких характеризується режимом профілактики. *Вчені записки ТНУ імені В. І. Вернадського. Серія: Технічні науки*, 2024. Т. 35 (74), № 1. С. 280–286. DOI: <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2024.1.1/42>. Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: <https://www.tech.vernadskyjournals.in.ua/35-74-1>.

6. Polozhaenko S. A., Prokofiev A. Yu. Estimation of Accuracy Indicators of Nonlinear Dynamic Systems. *Colloquium-journal*, 2024. Part 1. № 15 (208). P. 61–64. DOI: [10.24412/2520-6990-2024-15208-61-63](https://doi.org/10.24412/2520-6990-2024-15208-61-63).

URL: <https://colloquium-journal.org/wp-content/uploads/2024/06/Colloquium-journal-2024-208-1.pdf>.

7. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Параметри методу Рунге-Кутти з різним порядком точності при інтегруванні рівнянь динаміки в задачах моделювання нестационарних систем. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2024. Т. 14, № 1-2. С. 85–96. DOI [10.15276/imms.v14.no1-2.85](https://doi.org/10.15276/imms.v14.no1-2.85). Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: [http://immm.op.edu.ua/files/archive/n1-2\\_v14\\_2024/immm\\_n1-2\\_v14\\_2024.pdf](http://immm.op.edu.ua/files/archive/n1-2_v14_2024/immm_n1-2_v14_2024.pdf).

8. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Параметрична редукція по точності математичних моделей динамічних об'єктів систем. *Вісник Кременчуцького національного університету ім. Михайла Остроградського*, 2024. Вип. 6 (149). С. 125–131 DOI <https://doi.org/10.32782/1995-0519.2024.6.15>. Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: [https://visnikkrnu.kdu.edu.ua/visnik.php?id\\_nom=71](https://visnikkrnu.kdu.edu.ua/visnik.php?id_nom=71).

9. Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю. Методи контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем, засновані на застосуванні контрольних алгоритмів. *Вісник Херсонського національного технічного університету*, 2025. Вип. 1 (92). Ч. 2. С. 185–193 DOI <https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2025.1.2.25> Видання включено до переліку наукових фахових видань України, категорія «Б».

URL: [https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk\\_kntu/issue/view/72](https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk_kntu/issue/view/72).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації.

10. Прокофьев А., Баранов М. Аналіз і моделювання аномальних дифузійних процесів з просторово-часовими характеристиками. *Scientific Paradigm in the Context of Technologies and Society Development: proceedings of the 5<sup>th</sup> International Scientific and Practical Conference, Geneva, 16-18 May 2023, Geneva, 2023. P. 454–458.*

URL: <https://archive.interconf.center/index.php/conference-proceeding/issue/view/16-18.05.2023/164>

11. Лись Д. А., Прокофьев А.Ю. Моделювання динамічного стану ударних хвиль у парорідинних двофазних системах. *Сучасні Інформаційні Технології 2023: матеріали XIII міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених, м. Одеса, 18–19 травня 2023 р. Одеса, 2023. С. 159–161.*

URL: [https://drive.google.com/file/d/1ERFn923\\_zrEXiPcGj8S0dbSb4K6ToDE/view](https://drive.google.com/file/d/1ERFn923_zrEXiPcGj8S0dbSb4K6ToDE/view).

12. Use of dynamic neural networks for modelling nonlinear objects with significant nonlinearity / Polozhaenko S., Fomin O., Krikun V., Orlov A., Prokofiev A. *Математика та інформатика в науці й освіті: виклики сучасності: збірник тез IV Міжнародної науково-практичної Інтернет-конференції, м. Вінниця, Мау 25–26 травня 2023 р., Вінниця, 2023. С. 121–124.*

URL: <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/791>

13. Use of Dynamic Neural Networks for Modeling Nonlinear Objects with Significant Nonlinearity / Fomin O., Polozhaenko S., Krikun V., Orlov A., Prokofiev A. *Annals of Computer Science and Intelligence System, Volume 37: preceding 18th Conference on Computer Science and Intelligence Systems. Warsaw, 17–20 September 2023, Warsaw, 2023. P. 97–102. DOI: 10.15439/2023F3874.*

URL: <https://annals-csis.org/proceedings/2023/drp/3874.html>

14. Прокофьев А. Ю., Положаєнко С. А. Підвищення якості процесу моделювання динамічних систем на основі методу точностного тарування. *Проблеми та перспективи реалізації та впровадження міждисциплінарних наукових досягнень: матеріали VI Міжнародної наукової конференції, м. Біла*

Церква, 2 лютого 2024 р., Вінниця: ТОВ «УКРЛОГОС Груп, 2024. С. 155–160.  
DOI: <https://doi.org/10.36074/mcnd-02.02.2024>.

URL: <https://archive.mcnd.org.ua/index.php/conference-proceeding/issue/view/02.02.2024/52>.

15. Метод ранжирування за похибкою для оцінювання точності розв’язування задач моделювання динамічних систем / Положаєнко С. А., Прокоф’єв А. Ю., Літинський В. В., Татарин О. В. *Сучасні інформаційні та електронні технології*: твори XXV Міжнародної науково-практичної конференції, м. Одеса, 27–29 травня 2024 р. Одеса, 2024. С. 15–16.

URL: <https://www.old.tkea.com.ua/siet/archive/2024/15.pdf>.

16. Положаєнко С. А., Прокоф’єв А. Ю. Оцінювання розв’язків задач моделювання динамічних систем на основі методу ранжування за похибкою. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: тези доповідей 10-ї Міжнародної наукової конференції. м. Кам’янець-Подільський, 28–29 червня 2024 р., Кам’янець-Подільський, 2024. С. 104–105.

URL: <http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/8145>.

17. Improving measurements accuracy in weight-in-motion systems using dynamic neural networks / Oleksandr Fomin, Sergii Polozhaenko, Petro Bidiuk, Oleksii Tataryn, Andrii Prokofiev. *Information Control Systems & Technologies (ICST 2024)*: proceedings of the 12th International Conference, Odesa, 23–25 September, 2024. Odesa, 2024 P. 483–493.

URL: <https://ceur-ws.org/Vol-3790/paper42.pdf>. (Scopus).

18. Положаєнко С. А., Прокоф’єв А. Ю. Адаптивний метод контролю достовірності обчислювальної реалізації моделей динамічних систем в процесах їх моделювання та управління. *Development Priorities for Technical Sciences in the Modern World*: proceedings International scientific conference, Riga, 19–20 March 2025, Riga, 2025. P. 35–39. DOI <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-542-6-9>

URL: <http://baltijapublishing.lv/omp/index.php/bp/catalog/book/578>.

ДОДАТОК Д ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ  
ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

1. 5<sup>th</sup> International Scientific and Practical Conference, Geneva, 16-18 May 2023, Geneva, 2023. *Доповідь та публікація тез.*

URL: <https://archive.interconf.center/index.php/conference-proceeding/issue/view/16-18.05.2023/164>

2. XIII Міжнародна наукова конференція студентів та молодих вчених, «Сучасні Інформаційні Технології – 2023 (MIT–2023)», Одеса, 18–19 травня 2023 р. Одеса, 2023. *Доповідь та публікація тез.*

URL: [https://drive.google.com/file/d/1ERFn923\\_zrEXiPcGj8S0dbSb4K6ToDE/view](https://drive.google.com/file/d/1ERFn923_zrEXiPcGj8S0dbSb4K6ToDE/view).

3. IV Міжнародна науково-практична Інтернет-конференція «Математика та інформатика в науці й освіті: виклики сучасності», Вінниця, 25–26 травня 2023 р., Вінниця, 2023. *Доповідь та публікація тез.*

URL: <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/791>

4. 18th Conference on Computer Science and Intelligence Systems «Annals of Computer Science and Intelligence System», Warsaw , 17–20 September 2023, Warsaw, 2023. . *Доповідь та публікація тез.*

URL: <https://annals-csis.org/proceedings/2023/drp/3874.html>

5. VI Міжнародна наукова конференція «Проблеми та перспективи реалізації та впровадження міждисциплінарних наукових досягнень», Біла Церква, 2 лютого 2024 р., Біла Церква. *Доповідь та публікація тез.*

URL: <https://archive.mcnd.org.ua/index.php/conference-proceeding/issue/view/02.02.2024/52>

6. XXV Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні інформаційні та електронні технології:», Одеса, 27–29 травня 2024 р. Одеса, 2024. *Доповідь та публікація тез.*

URL: <https://www.old.tkea.com.ua/siet/archive/2024/15.pdf>.

7. 10-а Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації», Кам'янець-Подільський, 28–29 червня 2024 р., Кам'янець-Подільський, 2024. *Доповідь та публікація тез.*

URL: <http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/8145>.

8. 12th International Conference «Information Control Systems & Technologies (ICST 2024)», Odesa, 23–25 September, 2024. Odesa, 2024. *Доповідь та публікація тез.*

URL: <https://ceur-ws.org/Vol-3790/paper42.pdf>. (Scopus).

9. International scientific conference «Development Priorities for Technical Sciences in the Modern World», Riga, 19–20 March 2025, Riga, 2025. *Доповідь та публікація тез.*

URL: <http://baltijapublishing.lv/omp/index.php/bp/catalog/book/578>.

10. XV Міжнародна наукова конференція студентів та молодих вчених, «Сучасні Інформаційні Технології – 2025 (MIT–2025)», Одеса, 15–16 травня 2025 р. Одеса, 2025. *Доповідь та публікація тез.*

URL: [https://drive.google.com/file/d/1zi1TabIH7iso1-SW\\_9ntZ\\_LG0glE4Wa/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1zi1TabIH7iso1-SW_9ntZ_LG0glE4Wa/view?usp=sharing)